

MODERN (SEMBOLİK) MANTIK

A. ÖNERMELER MANTIĞI

1. Önermelerin Sembolleştirilmesi

Önermeler mantığında her bir yargı p, q, r... gibi sembollerle ifade edilir.

Örnek:

Dünya gezegendir. Dünya'nın şekli elipstir.

p q

Güneş yakıcıdır.

r

2. Önerme Eklemleri : \sim , \wedge , \vee , \Rightarrow , \Leftrightarrow

Dünya gezegen ise güneş yakıcıdır. ($p \Rightarrow r$)

p \Rightarrow r

Dünya gezegendir ve şekli elipstir. ($p \wedge q$)

p \wedge q

Ay, ışık kaynağı değildir. ($\sim p$)

p \sim

Bitkiler köklüdür. (p)

Dünya gezegendir veya güneş yakıcıdır. ($p \vee r$)

p \vee r

Güneş doğduğunda ancak gündüz olur. ($p \Leftrightarrow r$)

p \Leftrightarrow r

3. Önerme Çeşitleri

a. Basit önerme

Bir tek yargısı olan önermeler basittir.

Aristoteles filozoftur.

p

Bazı çiçekler kokuludur.

q

b. Bileşik önerme

Birden fazla yargısı olan önermeler bileşiktir.

Aristoteles filozoftur veya bilim adamıdır. (p v q)

p

q

Yağmur yağıyor ise hava bulutludur. (r ⇒ s)

r

s

Not: İçinde önerme eklemi taşıyan önermeler de birden fazla yargı taşıdıklarından bileşiklerdir.

İstanbul başkent değildir (\sim p)

p (bileşen) \sim

Kuşlar kanatlıdır ve iki ayaklıdır. (q ^ r)

q (bileşen) r (bileşen)

Bileşik önermeyi meydana getiren önermelerin her birine bileşen denir. Hiçbir bileşeni olmayan önermeler basittir. Sadece değilleme (\sim) eklemının tek bileşeni vardır. Kuşlar ötücüdür. (p) önermesi basittir.

Kuşlar ötücü değildir. (\sim p) önermesi bileşiktir.

4. Ana Eklem – Ana Bileşen

Birden fazla bileşik önermeden oluşan önermelerde en son işleme katılan eklem, ana eklemidir.

Ana eklemının karşıladığı önermeler de ana bileşendir.

p	q	$p \vee q$
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

c. Tümel evetleme eklemi (\wedge)

Bileşenlerinin tümünün doğru olduğunu kabul eden önerme eklemidir. Bileşenlerin birlikteliğini ifade eden ile, kadar, hem-hem, da-da tümel evetleme eklemiyle belirtilir.

Mevsim yazdır ve güneş yakıcıdır. ($p \wedge q$)

p	q	$p \wedge q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

d. Koşul eklemi (\Rightarrow)

Yargının bir koşula bağlı olduğu önerme eklemidir.

Yağmur yağıyor ise hava bulutludur. ($p \Rightarrow q$)

p (ön bileşen) q (ard bileşen)

p	q	$p \Rightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

Hava bulutlu değilSE yağmur yağmaz. ($\sim q \Rightarrow \sim p$)

$\sim q$ $\sim p$

önermesi, $p \Rightarrow q$ önermesinin mantıksal sonucudur. Dolayısıyla aynı doğruluk değerlerine sahiptirler.

Yağmur yağmıyor veya hava bulutludur. ($\sim p \vee q$)

$\sim p$ q

önermesi de, $p \Rightarrow q$ önermesinin mantıksal sonucudur. Dolayısıyla doğruluk değerleri aynıdır.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$\sim p \vee q$
D	D	D	D	D
D	Y	Y	Y	Y
Y	D	D	D	D
Y	Y	D	D	D

\equiv \equiv

e. Karşılıklı koşul eklemi (\Leftrightarrow)

Yargının sadece tek bir koşula bağlı olduğu önerme eklemidir.

Güneş doğduğunda ancak ve ancak gündüz olur. ($p \Leftrightarrow q$)

6. Denetlemeler

a. Tutarlılık

- Bir önermenin tutarlılığı : Yorumlama tablosunda doğrulardan oluşan en az bir satırı bulunan önermeler tutarlıdır.

Mevsim kıştır.	p	
_____	_____	
p	D	Tutarlı
	Y	Geçersiz

Not 1:

1. Tutarlı önermeler geçersiz olabilir.
2. Geçersiz önermeler tutarlı olabilir.

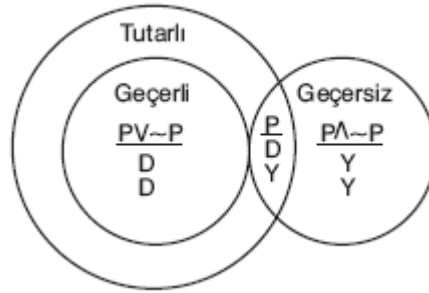
Mevsim kıştir veya mevsim kış değildir. ($p \vee \sim p$)

p			$\sim p$
p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	
D	Y	D	Tutarlı
Y	D	D	Geçerli

Not 2: Geçerli her önerme tutarlıdır.

Mevsim kıştir ve mevsim kış değildir. ($p \wedge \sim p$)

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
D	Y	Y
Y	D	Y
Tutarsız		
Geçersiz		



Not 3:

- Tutarsız her önerme geçersizdir.
- Geçersiz bir önerme tutarsız olabilir.
- Birden fazla önermenin birlikte tutarlılığı: Yorumlama tablosunda doğrulardan oluşan ortak bir yorumu bulunan önermeler birlikte tutarlıdır.

p	q	$\sim p \vee q$	$\sim p \Rightarrow q$	
D	D	D	D	→ $\sim p \vee q, \sim p \Rightarrow q$
D	Y	Y	D	
Y	D	D	D	önergeleri birlikte
Y	Y	D	Y	tutarlıdır.

b. Geçerlilik:

Yorumlama tablosunda yanlışlardan oluşan hiçbir satırı bulunmayan önermeler geçerlidir. Yukarıda geçen önermelerin geçerliliğini inceleyelim,

- Çıkarımların Geçerliliği: Bir çıkarımın geçerli olması, öncülleri doğruyken sonucun yanlış olmamasına bağlıdır. Buna göre öncülleri doğru iken sonucu yanlış olan çıkarım geçersiz, diğer hallerde geçerlidir. Örnek:

Güneş doğmuştur. (p) öncül

O halde gündüz olmuştur (q) sonuç

$p \Rightarrow q$ olarak sembolleştirilebilen bu çıkarımın geçerliliğini inceleyelim.

I. Durum	II. Durum	III. Durum	IV. Durum
D	D	Y	Y
D	Y	D	Y
Geçerli	Geçersiz	Geçerli	Geçerli
$D \Rightarrow D \equiv \boxed{D}$	$D \Rightarrow Y \equiv \boxed{Y}$	$Y \Rightarrow D \equiv \boxed{D}$	$Y \Rightarrow Y \equiv \boxed{D}$

c. Eşdeğerlilik:

Aynı doğruluk değerine sahip önermeler eşdeğerdir.

p	$\sim \sim p$	$P \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$p \vee \sim p$	$q \vee \sim q$
D	D	D	D	D	D
Y	Y	Y	Y	D	D
		D	D		
		D	D		
\equiv		\equiv		\equiv	

Not: Bütün geçerli önermeler eşdeğerdir.

$p \wedge \sim p$	$q \wedge \sim q$
Y	Y
Y	Y
\equiv	

Not: Bütün tutarsız önermeler eşdeğerdir.

A, B gibi iki ayrı önermenin eşdeğer olması (aynı doğruluk değerinde olması) $A \Leftrightarrow B$ önermesinin geçerli olmasına veya $\sim (A \Leftrightarrow B)$ önermesinin tutarsız olmasına bağlıdır.

Buna göre $\sim (A \Leftrightarrow B)$ tutarsız ise, $(A \Leftrightarrow B)$ geçerlidir. Dolayısıyla A ile B eşdeğerdir.

B. YÜKLEMLER MANTIĞI

İçinde \forall (her), \exists (bazı) gibi niceleyici geçen önermeler yüklem mantığının konusunu oluşturur. Bu önermelere genel önerme denir. İçine niceleyici geçmeyen önermelere de tekil önerme denir.

Yüklem mantığında önermeler mantığından farklı olarak basit önermelerin iç yapıları da sembolleştirilebilmektedir. Örnek olarak:

"Bütün kuşlar kanatlıdır" önermesi önermeler mantığında p olarak sembolleştirilirken, yüklem mantığında ($\forall xFx$) şeklinde sembolleştirilir. Bu ayrıntılı sembolleştirilmeden dolayı önermeler mantığında tutarlı olan bir önerme yüklem mantığında tutarsız olabilmektedir.

1. Tanımlamalar

a. Değişmezler ve sembolleştirilmesi:

– Mantık değişmezleri:

$\sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ (önerme eklemleri)

\forall, \exists (niceleyiciler)

– Özel değişmezler:

a, b, c...(ad değişmezleri)

F, G, H ...(yüklem değişmezleri)

Aristo filozoftur (Fa)

a F

Aristo insandır. (Ga)

a G

Sokrates insandır. (Gb)

b G

Aristo filozof ise Aristo insandır. (Fa \Rightarrow Ga)

Fa \Rightarrow Ga

b. Değişkenler: Belli bir değeri olmayan ve farklı değerler alabilen $x, y, z...$ gibi sembollere değişken denir. içine x, y, z gibi değişken geçen önermelere de açık önerme denir. Örneğin;

" $x < z$ "

" $x + y = 4$ "

" z başkenttir." birer açık önermedir.

Açık önermelerin doğruluk değeri yoktur.

c. Tümel Nicleleme: " x katıdır" (Kx) açık önermesi $E = \{\text{demir, cam}\}$ evreninde

"Demir katıdır."

"Cam katıdır." özellemleri yapıldığında, evrendeki tüm elemanlar (Tümel nicleleme gereği evrendekilerin hepsi) açık önermedeki x 'i karşılırsa, Kx açık önermesi verilen evren için " $x K x$ olarak gösterilir.

" $\forall x$ (x başkenttir)" önermesinin $E = \{\text{Ankara, İstanbul}\}$ evreninde;

"Ankara başkenttir." D

"İstanbul başkenttir." Y

özellemleri yapıldığında, $D \wedge Y \equiv Y$ sonucuna ulaşılır. Buna göre tümel niceleyici ile yapılan önerme verilen evrende gerçekleşmemiştir.

d. Tikel nicleleme: " x sıvıdır." (Sx) açık önermesi $E = \{\text{su, taş}\}$ evreninde, "Su sıvıdır."

"Taş sıvıdır." özellemleri yapıldığında; evrendeki bazı elemanlar (Tikel nicleleme gereği evrendekilerden en az biri) açık önermedeki x 'i karşılırsa, Sx açık önermesi verilen evren için " $\exists x S x$ olarak gösterilir.

" $\exists x$ (tek sayıdır.)" önermesinin $E = \{0, 1, 2\}$ evreninde

"0 tek sayıdır." Y

"1 tek sayıdır." D

"2 tek sayıdır." Y özellemleri yapıldığında,

$Y \vee D \vee Y \equiv D$ sonucuna ulaşılır. Buna göre tikel niceleyici ile yapılan önerme verilen evrende gerçekleşmiştir.

Tümel niceleyici ile yapılan önermelerde, özellemlerin arasında tümel evetleme eklemi (\wedge) kullanılır. Tikel niceleyici ile yapılan önermelerde, önermeler arasında tikel evetleme eklemi (\vee) kullanılır.

e. Niceleyici Değilleme Kuralları (Eşdeğerlilik)

$$\sim \forall x F x \equiv \exists x \sim Fx$$

$$\sim \exists x F x \equiv \forall x \sim Fx$$

$$\sim \forall x \sim F x \equiv \exists x Fx$$

$$\sim \exists x \sim F x \equiv \forall x Fx$$

Eşdeğerlilik Örnekleri:

Her insanın fakir olduğu doğru değildir.

Bazı insanlar fakir değildir.

$$\left. \begin{array}{l} (\sim \forall x F x) \\ (\exists x \sim F x) \end{array} \right\} \equiv$$

Bazı insanların fakir olduğu doğru değildir.

Hiçbir insan fakir değildir.

$$\left. \begin{array}{l} (\sim \exists x F x) \\ (\forall x \sim F x) \end{array} \right\} \equiv$$

Hiçbir insanın fakir olmadığı doğru değildir.

Bazı insanlar fakirdir.

$$\left. \begin{array}{l} (\sim \forall x \sim F x) \\ (\exists x F x) \end{array} \right\} \equiv$$

Bazı insanların fakir olmadığı doğru değildir.

Her insan fakirdir.

$$\left. \begin{array}{l} (\sim \exists x \sim F x) \\ (\forall x F x) \end{array} \right\} \equiv$$

s.gky