3. BÖLÜM

MODERN (SEMBOLİK) MANTIK

A. İKİ DEĞERLİ MANTIK

1. ÖNERMELER MANTIĞI
    - a. Önerme Eklemleri ve Doğruluk Çizelgeleri
    - b. Mantık Değişmezleri, Geçerlilik, Tutarlılık, Denklik (Eş değerlik)
    - c. Çözümleyici Çizelge
2. NİCELEME MANTIĞI
    - a. Niceleyiciler ve Açık Önermeler
    - b. Yorumlama, Geçerlilik ve Tutarlılık
    - c. Çözümleyici Çizelge

B. ÇOK DEĞERLİ MANTIK

C. KİPLİK MANTIĞI

D. ÖZDEŞLİK MANTIĞI

E. VARLIK MANTIĞI

"Mantığın yasaları, nesnel gerçekliğin, insanın öznel bilincinde yansımasının yasalarıdır."

Orhan Hançerlioğlu

BU BÖLÜMÜN AMAÇLARI

Bu üniteyi bitirdiğiniz zaman,

- Sembolik mantığın temel konularını kavrayacak,
- Önermeler mantığını tanımlayacak,
- Sembolleştirme ve yorumlama bilgisini öğrenecek,
- Farklı mantık türleri hakkında bilgi sahibi olacak,
- Tutarlılık, geçerlilik ve eş değerliğin ne anlama geldiğini kavrayacaksınız.

NASIL ÇALIŞMALIYIZ?

- Konu içindeki soruları yanıtlayın.
- Konu içinde verilen ödevleri mutlaka yapın.
- Her konuda verilen örnekleri dikkatle inceleyerek, aynı konulara kendiniz değişik örnekler bulun.
- Verilmiş olan örnekleri tekrarlayın.

HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

1. Sembol ne anlama gelir? Gündelik yaşamda ne tür semboller kullanırız ve bu semboller ne işe yaramaktadır?
2. Klâsik mantığın neden sembolleştirilmesine ihtiyaç duyulduğunu araştırınız.
3. Bir sözlükten "tutarlılık" ve "geçerlilik" kavramlarının anlamlarına bakınız.

MODERN (SEMBOLİK) MANTIK

Modern mantık, mantık unsurlarını sembollerle ifade eden ve bu sembollerle işlemler yaparak sağlam çıkarımlara ulaşmayı amaçlayan bir disiplindir.

Klâsik mantık gibi modern mantığın da amacı geçerli çıkarımlara ulaşmaktır. Geçerli çıkarımları geçersiz çıkarımlardan ayırt etme işlemi çıkarımların denetlenmesi ile olur. **Denetleme**, çıkarımların geçerliliğini belirleme işlemidir. Mantıksal geçerlilik içeriksel değil biçimsel doğruluktur. Modern mantık, günlük dildeki çıkarımları, matematik diline benzeyen, çok anlamlılığa ve belirsizliğe hiç yer vermeyen sembolik bir dile çevirip kesin bir denetlemeyi sağlar. Bu yeni mantık, klasik Aristoteles mantığının alanını aşmış ve onu geliştirip genişletmiştir. Modern mantıkta denetleme, neredeyse matematiğin ispatlarında görülen bir kesinlikle yapılabilmektedir. Modern mantığın klasik mantıktan en önemli farkı, tamamen sembolik olduğu için içeriğin etkisinden kurtulmuş olmasıdır. Buna rağmen klasik mantık günlük dili kullandığı için kısmen içeriğin etkisindedir.

Modern mantık günümüzde pek çok alanda uygulanmaktadır. Örneğin bilgisayar teknolojisindeki gelişmelerde (bilgisayar devrelerinin programlanması), elektrik devrelerinin çözümlenmesinde ve matematiksel ispatlamalarda sembolik mantıktan yararlanılmaktadır. Günlük yaşamda ise sağlam akıl yürütmeler yapma, başkalarının düşünce biçimlerini analiz edip eleştirebilme, ana dili daha doğru kullanılabilme konularında sembolik mantık yol göstericidir. Modern mantık, günümüzün özellikle bilgi ve dil felsefesi dallarına da yeni açılımlar sağlamıştır.

Modern mantık, iki değerli mantık, çok değerli mantık, kiplik mantığı, özdeşlik mantığı ve varlık mantığı olmak üzere beşe ayrılır.

A. İKİ DEĞERLİ MANTIK

İki değerli mantıkta bir önermenin doğru ve yanlış olmak üzere iki değeri vardır ve başka bir üçüncü olasılık kabul edilmez. İki değerli mantık önermeler ve niceleme mantığı olmak üzere iki bölümde incelenir.

1. Önermeler Mantığı

Önermeler mantığı, birden fazla önerme ve bu önermeleri birleştiren eklemlerin sembolleştirilmesidir. Daha önce, bir yargı belirten ve doğru ya da yanlış olan cümlelere önerme dendiğini görmüştük. Önermeler basit ve bileşik önerme olmak üzere ikiye ayrılıyordu. Bileşik önermeler birden fazla basit önermenin "ve", "veya", "ise", "ancak", "ancak ve ancak" ve "değil" gibi eklerle birbirine bağlanır. Bunlara **önerme eklemleri** denir.

Örnek:

"Ahmet avukat veya savcıdır."

Yukarıdaki önerme bir bileşik önermedir. Bu bileşik önerme "Ahmet avukattır." ve "Ahmet savcıdır." basit önermelerinin "veya" eklemiyle bağlanması sonucu oluşmuştur.

Önermeler mantığında basit önermeler **p, q, r, s, t, v, z.**.... gibi önerme sembolleriyle gösterilir. Öyleyse bundan sonra "Özge sınıfını geçti." önermesi yerine "p" sembolünü (ya da bir başkasını) kullanabiliriz.

Önermelerin aldığı doğru ya da yanlış değere doğruluk değeri denir ve "D" ve "Y" harfleriyle gösterilir.

Örnek:

İstanbul Türkiye'nin en büyük kentidir. (D)

3 kere 3, 27 eder. (Y)

Önermeler mantığı, önerme eklemleri ile oluşmuş önermeleri ve çıkarımları ele alır. Çıkarımın verilen öncüllerden sonuç olarak yeni bir önerme çıkarma işlemi olduğunu hatırlayacaksınız.

Sürekli kitap okuyan öğretmen başarılı olur.	öncül (p)
Canan sürekli kitap okur.	öncül (q)
O hâlde; Canan başarılı öğretmen olur.	sonuç ($\therefore$r)

Birinci ve ikinci öncüller sonuç önermesine "o hâlde" sözcüğü ile bağlanmıştır. Bundan sonra "o hâlde", "öyleyse", "demek ki" gibi özcükler " $\therefore$ " işaretiyle gösterilecektir.

Sembolik mantıkta "Şermin gazetecidir." gibi bir önerme basit bir önermedir. Çünkü herhangi bir önerme eklemi almamıştır. Ne var ki, "Şermin gazeteci değildir." gibi bir önerme bileşik önermedir. Çünkü, "değil" sözcüğü bir önerme eklemidir. O hâlde sembolik mantıkta içinde önerme eklemi geçen herhangi bir önerme, bileşik önerme olarak ele alınacaktır. Eğer önerme eklemi bulunmuyorsa basit önermedir. Dolayısıyla, klasik mantığa göre "Şermin gazeteci değildir." önermesi tek bir yargı bildirdiği için basit önerme iken sembolik mantığa göre, önerme eklemi aldığı için bileşik önermedir.

Klasik mantıkta basit bir önerme bir **ad**, bir **yüklem** ve bir **bağ**dan oluşur. Önermelerde birden fazla ad olabilir. Örneğin, "Felsefe ve bilim birbirini tamamlar." önermesinde "felsefe" ve "bilim" olmak üzere iki ad vardır. Bu nedenle bu önerme ikili yüklemli bir önermedir. Herhangi bir önermede yüklem sadece tek bir "ad"a yüklenirse **birli yüklem**, "iki ad"a yüklenirse **ikili yüklem**, "üç ad"a yüklenirse **üçlü yüklem**, "n sayıda ad"a yüklenirse **n'li yüklem** adı verilir.

Örnek :

Hegel filozoftur.
Birli yüklem

2 > 3
İkili yüklem

Ali ile Ayşe kardeştir.
İkili yüklem

Ankara, Eskişehir ile Kırıkkale arasındadır.
Üçlü yüklem

a. Önerme Eklemleri ve Doğruluk Çizelgeleri

Önerme eklemleri, basit önermeleri bileşik hâle getiren mantık değişmezleridir. Bu eklemler "ve", "veya", "ise", "ancak ve ancak" ve "değil" sözcükleriyle ifade edilir.

Önerme eklemlerinin birinci işlevi bileşik önermeler oluşturmak; ikinci işlevi önermelerin tutarlılık, geçerlilik ve eş değerliliğinin ve çıkarımların geçerliliğinin denetlenmesini sağlamaktır.

Önerme eklemlerinin sembolik mantıkta kullanılış biçimleri aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Önerme Eklemi	Sembolü	Kullanımı	Örnek Önerme	Sembolik Mantıkta Kullanımı
Değilleme eklemi	~	"değil"	Tekin yaramaz **değildir.**	~p
Tümel evetleme eklemi	$\wedge$	"ve, ne..ne de, hem..hem de"	Tekin **ve** Mehmet çalışkandır.	$p\wedge q$
Tikel evetleme eklemi	v	"veya, ya da"	"Şiirlerinde **veya** öykülerinde yeni bir anlatım yoktur."	pvq
Koşul eklemi	$\Rightarrow$	"ise"	Çalışkan**sa** başarır.	$p\Rightarrow q$
Karşılıklı koşul eklemi	$\Leftrightarrow$	"ancak ve ancak"	Gülşah **ancak ve ancak** çalışırsa başarır.	$p\Leftrightarrow q$

Bir bileşik önermede birden fazla önerme eklemi bulunabilir. Örneğin, "Üretim artarsa fiyatlar azalır ve enflasyon düşer." önermesinde "ise" ve "ve" olmak üzere iki önerme eklemi vardır.

Bileşik önermelerde, bileşikliği oluşturan yargılara bileşen adı verilir. Bir bileşik önermede önce gelen bileşene ön bileşen, sonra gelen bileşene art bileşen adı verilir. "Yağmur yağarsa ürün bol olur." önermesinde "Yağmur yağar." önermesi ön bileşen, "ürün bol olur." önermesi art bileşendir.

"İnsan özgürlüğüne kavuşursa hem mutlu hem de huzurlu olur ve kendi yeteneklerini geliştirebilir." önermesinde kaç önerme eklemi kullanıldığını ve kaç bileşen kullanıldığını bulunuz.

Bir bileşik önermede, önermenin tümünü etkileyen ekleme **ana eklem**, birbirine bağlanan önermelere ise **ana bileşenler** denir. Aşağıdaki örnekler ana eklem ve ana bileşenleri göstermektedir.

~p	~ ana eklem		p ana bileşen
p⇔q	p ana bileşen	⇔ ana eklem	q ana bileşen
~pvq	~p ana bileşen	v ana eklem	q ana bileşen
~ (pvq)	~ ana eklem		pvq ana bileşen
[(pΛq)⇒p]⇔r	[(pΛq)⇒p] ana bileşen	⇔ ana eklem	r ana bileşen
~ [(pvq)⇔(pΛq)]	~ ana eklem		[(pvq)⇔(pΛq)] ana bileşen
[~(pv~q)⇒(pvq)]	~(pv~q) ana bileşen	⇒ ana eklem	(pvq) ana bileşen

Bileşik önermeler ana eklemlerine göre tanımlanır. Aşağıdaki çizelge bu tanımlamaları göstermektedir.

Bileşik Önerme	**Tanımlama**
~p	Değilleme önermesi
pvq	Tümel evetleme önermesi
pΛq	Tikel evetleme önermesi
p⇒q	Koşul önermesi
p⇔q	Karşılıklı koşul önermesi

Bileşik önermelerin doğruluk değeri doğruluk tablosu ile denetlenir. Sembolik mantıkta önermeleri doğrudan ifade etmeyip semboller kullandığımız için, bir önermenin doğru ya da yanlış olup olmadığını bilemeyiz. Bu nedenle, bir önermenin doğru ve yanlış olmak üzere iki değeri vardır. Doğru değer "D" ile, yanlış değer "Y" ile gösterilir.

Şimdi, kullandığımız önerme eklemlerinin **doğruluk tablosunda** aldıkları değerleri görebiliriz.

Değilleme Eklemi

Olumlu bir ifadeyi olumsuz, olumsuz bir ifadeyi olumlu yapan deyimlere değilleme denir. Değilleme eklemi "~" sembolü ile gösterilir. Örneğin, "İnsan özgürdür." (p) önermesinin değillemesi "İnsan özgür değildir." (~p) önermesi olur. Bir önerme doğru ise değillemesi yanlış, bir önerme yanlış ise değillemesi doğru olur.

p	**~p**
D	Y
Y	D

Değillenen önerme tekrar değillendiğinde ilk önermenin doğruluk değerini alır ve buna çifte değilleme kuralı denir.

p	**~p**	**~~p**
D	Y	D
Y	D	Y

Tümel Evetleme Eklemi (Λ)

Günlük dilde konuşurken "ve", "hem...hem de", "da...da" gibi sözcüklerle ifade ettiğimiz eklemdir. Kısaca, iki basit önermenin "ve" (Λ) eklemiyle birleştirilmesinden oluşmuş bileşik önermeye **tümel evetleme önermesi** adı verilir.

Tümel evetleme önermesinde bileşik önermenin doğruluğu, bu bileşik önermeyi oluşturan bütün bileşenlerin aynı anda doğru olmasına bağlıdır. Bunun nedeni oldukça basittir. Örneğin, "Ahmet ve Mehmet sınıfını geçti." önermesinde, "Ahmet sınıfını geçti." ve "Mehmet sınıfını geçti." olmak üzere iki bileşen vardır. Bu önermelerin doğru değer alması her ikisinin de sınıfını geçtiği, yanlış değer alması her ikisinin de sınıfını geçemediği anlamına gelir. Yukarıdaki "Ahmet ve Mehmet sınıfını geçti." önermesinin doğru olabilmesi için her ikisinin de sınıfını geçmiş olması, yani her iki önermenin de doğru değer almış olması gerekir. Bir önerme yanlışsa bu bileşik önerme de yanlış olur. Çünkü, "Ahmet ve Mehmet sınıfını geçti." önermesinde, aradaki eklem "ve" olduğuna göre her ikisinin de sınıfını geçtiği evetlenmektedir. Bu nedenle hepsinin evetlenmesi anlamında "tümel evetleme" adını veriyoruz.

Tümel evetleme ekleminin çözümleme kuralı aşağıdaki gibi olur.

p	**q**	**p∧q**
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

Tek bir önermenin (p) alacağı doğruluk değeri doğru ya da yanlış olmak üzere iki tanedir. Ancak, iki önermenin (p ve q gibi) bir arada alabilecekleri doğruluk değerlerini bir arada düşünürsek dört olasılık ortaya çıkar: İkisi de doğru, birincisi doğru ikincisi yanlış, birincisi yanlış ikincisi doğru ve her ikisi de yanlış. Eğer üç önermenin bir arada doğruluk değerine bakılırsa o zaman da sekiz farklı değer ortaya çıkar. Yukarıdaki tabloda iki önerme olduğu için dört farklı değer ortaya çıkmıştır.

Tikel Evetleme Eklemi (v)

Günlük dilde "veya", "ya da", "ya...ya" gibi sözcüklerle ifade ettiğimiz eklemdir. Kısaca, iki basit önermenin "veya" (v) eklemiyle birleştirilmesinden oluşmuş bileşik önermeye **tikel evetleme önermesi** adı verilir. Tikel evetleme ekleminin doğru olması için bileşenlerinden birinin doğru olması gerekli ve yeterlidir.

p	**q**	**pvq**
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

Örneğin, "İnsanlar iyi yaşamayı veya uzun yaşamayı hak eder." önermesinin doğru değer alması için,"İnsanlar iyi yaşamayı hak eder." ya da "İnsanlar uzun yaşamayı hak eder." önermelerinden bir tanesinin doğru değer alması gereklidir. Çünkü, aradaki eklem "veya" olduğuna göre, sadece bir tanesinin evetlenmiş olması yeterlidir. Nitekim, bundan dolayı önermelerden en az birinin evetlenmesi anlamında "tikel evetleme" diyoruz.

?

(p∧q)v(~p∧~q) önermesinde, p önermesi "doğru", q önermesi "yanlış" ise, bu önermenin sonucu nedir? p önermesinin yerine "D", q önermesinin yerine " Y" koyarak bulunuz.

Koşul eklemi (⇒)

Günlük dilde "ise", "se", "sa", "ancak" gibi sözcüklerle ifade edilen eklemdir. İki basit önerme "ise" eklemiyle birleştirilmişse buna **koşul önermesi** adı verilir. Koşul önermesinde ön bileşen doğru, art bileşen yanlış değer almışsa bileşik önerme yanlış değer alır. Diğer durumlarda önerme doğru değer alır.

p	**q**	**p⇒q**
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

Örneğin, "Dürüst davranır**san** insanlar seni sever." önermesinde birinci

p ⇒ q

önerme (p) doğru fakat ikinci önerme (q) yanlışsa koşul yerine gelmemiş demektir. Yani dürüst davranmış olmasına rağmen insanların onu sevdiği doğru değildir. Bu durumda, önermenin bütünü yanlış değer alır.

Karşılıklı Koşul Eklemi (⇔)

Günlük dilde "ancak ve ancak.........ise" sözcükleriyle ifade edilir. İki basit önerme "ancak ve ancak.....ise" ile birleştirilmişse, ortaya çıkan bileşik önermeye **karşılıklı koşul önermesi** adı verilir. Bu önerme türünde, bileşenlerin hepsi de aynı değeri almışsa önerme doğru, diğer hâllerde yanlıştır. Dolayısıyla, karşılıklı koşul ekleminin doğru olabilmesi için, bileşenlerden ikisi de doğru ya da ikisi de yanlış olmalıdır.

p	q	p⇔q
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

Örneğin, "Namık ancak ve ancak avukat olursa başarılı olur." önermesinde Namık'ın avukat olmadığı taktirde başarılı olamayacağı anlaşılmaktadır. Bu önermenin doğru olması, Namık'ın avukat olup başarılı olmasına ya da Namık'ın avukat olmayıp başarılı olamamasına bağlıdır.

?

"p" önermesi doğru, q önermesi yanlış olarak düşünüldüğünde, ~[(p⇒~q)⇔(~p⇒q)] bileşik önermesinin alacağı değer ne olur?

Modern mantıkta kullanılan beş eklemin alacakları doğruluk değerlerinin neler olduğunu gördük. Bu kuralları sık sık tekrar etmeniz öğrenmenizi kolaylaştıracaktır. Şimdi, bu beş önerme eklemine ilişkin olarak anlatılanları tek bir tabloya toplayarak gösterelim:

p	q	~p	~q	p∧q	pvq	p⇒q	p⇔q
D	D	Y	Y	D	D	D	D
D	Y	Y	D	Y	D	Y	Y
Y	D	D	Y	Y	D	D	Y
Y	Y	D	D	Y	Y	D	D

Bir doğruluk tablosunda yukarıdan aşağı doğru sıralamaya sütun, soldan sağa doğru sıralamaya satır adı verilir.

Yukarıda gördüğümüz eklemlerin kuralları yardımıyla, herhangi bir bileşik önermenin doğruluk değerini bulabiliriz. Bütün işlemleri eklemlerin kurallarına göre yapacağımız için bu kuralları sürekli aklımızda tutmamız gerekecek.

Örnek 1: p:Y, q:D değer aldığında $(p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q)$ önermesinin doğruluk değerini bulalım. Yapılacak ilk şey, verilen değerleri önermede yerine koymak ve önerme eklemlerinin kurallarına göre işlemi tamamlamaktır.

$$(p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q)$$

$$\underbrace{(Y \wedge D)}_{Y} \vee \underbrace{(Y \Rightarrow D)}_{D}$$

$Y \vee D \equiv D$ değer alır.

Örnek 2: p:D, q:Y olduğunda $\sim[(\sim p \Leftrightarrow q) \wedge (p \Leftrightarrow \sim q)]$ önermesinin aldığı doğruluk değerini bulalım.

$$\begin{aligned} \sim[(\sim p \Leftrightarrow q) \wedge (p \Leftrightarrow \sim q)] &\equiv \sim[(\sim D \Leftrightarrow Y) \wedge (D \Leftrightarrow \sim Y)] \\ &\equiv \sim[(Y \Leftrightarrow Y) \wedge (D \Leftrightarrow D)] \\ &\equiv \sim (D \wedge D) \equiv \sim D \equiv Y \text{ değer alır.} \end{aligned}$$

p ve q önermelerine farklı değerler vererek $(\sim p \Leftrightarrow \sim q) \Rightarrow (p \vee q)$ önermesinin alacağı değerleri bulunuz.

b. Mantık Değişmezleri, Tutarlılık, Geçerlilik, Denklik (Eş Değerlik)

Sembolik mantık, günlük dilde kullandığımız önerme ve çıkarımları sembolik dile dönüştürür. Bunu yaparken de değişmezlerden yararlanır.

Kendi içinde anlamlı olan ve daha küçük anlamlı birimlere ayrılamayan deyimlere değişmez denir.

Değişmezler, **mantık değişmezi** ve **özel değişmezler** olmak üzere ikiye ayrılır.

Değişmezler

- Mantık Değişmezleri
  - Önerme Eklemleri: "değil", "ve" "veya", "ise" "ancak ve ancak"
  - Niceleyiciler: "her", "bazı", "tüm", "hiçbir", "birkaç", kimi
  - Kiplik, özdeşlik varlık mantığı değişmezleri: "zorunlu", "mümkün" "özdeş"
- Özel Değişmezler
  - Ad Değişmezleri
  - Yüklem Değişmezleri

Mantıksal değişkenler: x, y, z gibi bilinmeyen ve değişik değerlere sahip olabilen sembollerdir. Değişmezler ve değişkenlerin birlikte oluşturduğu sözcük dizilerine **deyim** adı verilir.

Sembolleştirme: Önerme sembolleri ve mantık değişmezleriyle, günlük dildeki önermelerin ve çıkarımların sembolik dile çevrilmesidir. Tek bir basit önerme p, q, r, s, t, v..... gibi küçük harflerle sembolleştirilir. Bileşik önermelerde ise önce ana eklem bulunur ve bileşenler paranteze alınarak sembollerle gösterilir.

Basit ve bileşik önermelerin nasıl sembolleştirileceğini değişik örneklerle gösterelim:

Örnek 1: "Yağmur yağıyor." Önermesi, tek bir yargı içeren basit bir önerme olduğu için "p" harfi ile sembolleştirilir.

Örnek 2: "Yağmur yağar ise ürün bol olur."

p ⇒ q

önermesi ana eklemi "ise" olan bir bileşik önermedir. Yağmur yağar." önermesi "p", "ürün bol olur." önermesi "q" ile sembolleştirilirse, önermenin bütünü "p⇒q" biçiminde sembolleştirilir.

Örnek 3: "Yağmur yağar ve ürün bol olur**sa** insanlar mutlu olur."

p Λ q ⇒ r

önermesi üç bileşenli bir bileşik önermedir. Bu önermede insanların mutlu olması yağmur yağmasına ve ürünün bol olmasına bağlanmıştır. Bu durumda ana eklem koşul eklemidir. Bu durumda bu önerme (pΛq)⇒r biçiminde sembolleştirilir.

Sadece önermeler değil, çıkarımlar da aynı yöntemle sembolleştirilebilir. Hatırlayacağınız gibi, bir çıkarım en az iki öncülden ve bir sonuç önermesinden oluşur. Öncül önermeler ayrı ayrı sembolleştirilir ve sonuç önermesine "o hâlde" anlamına gelen " $\therefore$ " sembolü ile bağlanır.

Örnek 1:

Tüm insanları sevmek gerekir.

Zenciler insandır.

O hâlde, zencileri sevmek gerekir.

Yukarıdaki çıkarımda, "Tüm insanları sevmek gerekir." önermesini "p" ile, "Zenciler insandır." önermesini "q"ile, "Zencileri sevmek gerekir." önermesini "r" ile sembolleştirirsek, p, q $\therefore$ r çıkarımını elde ederiz.

Örnek 2:

Bir sporcu zeki ve çevik ise başarılı olur.

Seren zeki ve çeviktir.

O hâlde, Seren başarılı olur.

Yukarıdaki çıkarımı sembolleştirmek için önce birinci öncülden başlayarak adım adım gidelim.

Birinci öncül ⟶ Bir sporcu zeki ve çevik ise başarılı olur.

$p \land q \Rightarrow r$

İkinci öncül ⟶ Seren zeki ve çeviktir.

$p \land q$

Sonuç ⟶ O hâlde, Seren başarılı olur.

$\therefore \quad r$

Görüldüğü gibi, yukarıdaki çıkarımın sonuç olarak sembolleştirilmiş biçimi $(p \land q) \Rightarrow r$, $(p \land q) \therefore r$ biçiminde olur.

Yorumlama: Sembolik dile çevrilmiş çıkarımların ve bu çıkarımları oluşturan önermelerin geçerliliklerini denetleyebilmek için yorumlama gereklidir.

Sembolleştirilmiş önermelere doğru ya da yanlış bir doğruluk değeri verilmesine yorumlama denir.

"p" gibi tek bir basit önermenin doğru ve yanlış olmak üzere iki, "p" ve "q" önermelerinden oluşmuş bir bileşik önermenin dört, "p", "q" ve "r" gibi üç önermeden oluşmuş bir bileşik önermenin sekiz yorumlaması olur. Satır sayısı 2^n formülüyle bulunur. Burada "n" bileşen sayısını gösterir.

Önermelerin alabilecekleri yorumlar aşağıdaki gibidir.

p
D
Y

p	q
D	D
D	Y
Y	D
Y	Y

p	q	r
D	D	D
D	D	Y
D	Y	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	D	Y
Y	Y	D
Y	Y	Y

Önermelerin doğruluk değerlerinin verilerek yorumlanmasının yapıldığı çizelgelere yorumlama çizelgesi ya da doğruluk çizelgesi (tablosu) adı verilir. Bu bilgiler ışığında, herhangi bir önermenin nasıl yorumlandığını şu şekilde gösterebiliriz.

$p \Rightarrow (q \land p)$ önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibi olur.

p	q	$q \land p$	$p \Rightarrow (q \land p)$
D	D	D	D
D	Y	Y	Y
Y	D	Y	D
Y	Y	Y	D

İlk önce p ve q önermelerinin alabilecekleri doğruluk değerleri yazılır. Önermenin bileşenlerinin tek tek değerleri bulunduktan sonra, en sonunda önermenin bütününün doğruluk değerleri çıkarılır. Bütün bu işlemlerin daha önce gördüğümüz önerme eklemlerinin kurallarına göre yapıldığını unutmayınız.

Bu yöntem ile, önermelerin tutarlılık, geçerlilik ve eş değerliklerini denetlememiz olanaklı olur.

Önermenin Tutarlılığının Denetlenmesi

Bir önermenin tutarlılığı demek, o önermenin bütün yorumlamalarından en az birinin doğru değeri almış olması demektir. Bir önermenin tüm yorumlamaları doğruysa buna **totoloji** denir. Bir önermenin doğruluk tablosunda almış olduğu değerlerin tümü yanlışsa o önerme tutarsız demektir. Önermenin tutarlı olması demek ise, o önermenin içinde çelişik ifadelerin olmadığı anlamına gelir.

P	**p**	**p**
D	D	D
	Y	D

tutarlı

p	**p**
Y	Y
	Y

tutarsız

Şimdi, birkaç örnek vererek önermenin tutarlılığının nasıl denetlendiğini görelim.

Örnek 1: (pvq)Λp önermesinin tutarlılığını denetleyelim.

p	**q**	**pvq**	**(pvq)Λp**
D	D	D	D
D	Y	D	D
Y	D	D	Y
Y	Y	Y	Y

Tutarlı

Hatırlayacağınız gibi, bir önermenin tutarlı olabilmesi için yorumlarından en az birinin doğru olması yeterliydi. Yukarıdaki önermenin dört yorumundan ikisi doğru olduğu için bu önerme tutarlıdır.

Örnek 2: (pΛ~p)Λq önermesinin tutarlılığını denetleyelim.

p	**q**	**~p**	**pΛ~p**	**(pΛ~p)Λq**
D	D	Y	Y	Y
D	Y	Y	Y	Y
Y	D	D	Y	Y
Y	Y	D	Y	Y

Tutarsız

Yukarıdaki önermenin hiçbir doğrulayıcı yorumu bulunmadığı için tutarsızdır.

Örnek 3: (p⇒q)⇔(p⇒r)

p	q	r	p⇒q	p⇒r	(p⇒q)⇔(p⇒r)
D	D	D	D	D	D
D	D	Y	D	Y	Y
D	Y	D	Y	D	Y
D	Y	Y	Y	Y	D
Y	D	D	D	D	D
Y	D	Y	D	D	D
Y	Y	D	D	D	D
Y	Y	Y	D	D	D

Tutarlı

Yukarıdaki önermenin sekiz yorumundan altısı doğru olduğu için bu önerme tutarlıdır.

(~p⇔q)Λ(p⇒~q) önermesinin tutarlılığını doğruluk tablosuyla denetleyiniz.

Birden Fazla Önermenin Tutarlılığının Denetlenmesi

İki ya da daha fazla önermenin bir arada tutarlı olup olmadıklarını denetlemek için, bunların ayrı ayrı doğruluk değerleri bulunur ve birbirleriyle karşılaştırılır. Eğer bu önermeler aynı satırda en az bir defa doğru değeri almışsa bu önermeler tutarlıdır.

Örnek 1: pvq, p⇒q, ~p⇔q önermelerinin bir arada tutarlı olup olmadıklarını denetleyelim

p	q	~p	pvq	p⇒q	~p⇔q
D	D	Y	D	D	Y
D	Y	Y	D	Y	D
Y	D	D	D	D	D
Y	Y	D	Y	D	Y

Tutarlı

Yukarıdaki örnekte, üçüncü satırda her üç önerme doğru değer almıştır. Bu nedenle bu önermeler bir arada tutarlıdır.

Örnek 2: $p \Rightarrow q$, $p \wedge \sim q$ önermelerinin tutarlı olup olmadığını denetleyelim.

p	q	~q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \sim q$
D	D	Y	D	Y
D	Y	D	Y	D
Y	D	Y	D	Y
Y	Y	D	D	Y

Tutarsız

Yukarıdaki örnekte, iki önermenin aynı satırda bir arada aldıkları doğru değeri olmadığından bu önermeler tutarsızdır. Bu durumda bu önermeler birbirleriyle çelişiktir.

1. $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow p$ ve $p \wedge (q \Rightarrow \sim p)$ önermelerinin tutarlılığını doğruluk tablosu yaparak denetleyiniz.

2. $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \sim q$, $(\sim p \vee q) \Rightarrow p$ ve $(p \wedge q)$ önermelerinin tutarlılığını doğruluk tablosu yaparak denetleyiniz.

Önermenin Geçerliliğinin Denetlenmesi

Tüm yorumlamaları doğru olan önermeye geçerli önerme denir. Yorumlamalardan en az birisi yanlış değer almışsa bu önerme geçersizdir.

p	p
D	D
	D

geçerli

p	p	p
D	Y	Y
Y	Y	

geçersiz

Örnek 1: $(p \vee q) \vee (p \Rightarrow q)$ önermesinin geçerli olup olmadığını doğruluk tablosu ile denetleyelim:

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$(p \vee q) \vee (p \Rightarrow q)$
D	D	D	D	D
D	Y	D	Y	D
Y	D	D	D	D
Y	Y	Y	D	D

Geçerli

Yukarıdaki önermenin tüm yorumlamaları doğru olduğundan önerme geçerlidir.

Örnek 2: (pvq)Λp önermesinin geçerli olup olmadığını denetleyelim:

p	q	pvq	(pvq)Λp
D	D	D	D
D	Y	D	D
Y	D	D	Y
Y	Y	Y	Y

Geçersiz

Yukarıdaki önermenin üçüncü ve dördüncü satırlardaki iki yorumu yanlış olduğundan bu önerme geçersizdir.

Her tutarsız önerme aynı zamanda geçersizdir. Ancak, her tutarlı önermenin geçerli olacağını söyleyemeyiz. Geçerli de olabilir, geçersiz de olabilir.

?

Neden her tutarlı önerme aynı zamanda geçerli ya da geçersizdir diyemeyiz? Yanıtlayamadıysanız tutarlılık ve geçerlilik konusunu yeniden gözden geçirin.

Çıkarımların Geçerliliğinin Denetlenmesi

Çıkarımların geçerliliği iki yolla denetlenebilir.

Birinci yol: Çıkarımın iki öncülü tümel evetleme eklemiyle (Λ) birbirine bağlanır. Elde edilen tümel evetleme önermesi koşul eklemiyle (⇒) sonuç önermesine bağlanır. Elde edilen koşul önermesinin doğruluk tablosuyla geçerli olup olmadığı denetlenir. Koşul önermesi geçerliyse çıkarım da geçerli demektir.

Örnek 1: pvq, ~q ∴p çıkarımının geçerli olup olmadığını denetleyelim. Önce, öncülleri tümel evetleme eklemiyle birbirine bağlayalım. Böylece, (pvq)Λ~q önermesini elde ederiz. Bu önermeyi koşul eklemiyle sonuç önermesine bağladığımızda [(pvq)Λ~q]⇒p önermesini elde ederiz. Şimdi bu önermenin geçerliliğini denetleyebiliriz:

p	q	~q	pvq	(pvq)Λ~q	[(pvq)Λ~q]⇒p
D	D	Y	D	Y	D
D	Y	D	D	D	D
Y	D	Y	D	Y	D
Y	Y	D	Y	Y	D

Geçerli

Tüm değerleri doğru çıktığına göre bu önerme geçerli, dolayısıyla çıkarım geçerlidir.

Örnek 2: $\sim p \wedge \sim q,\ p \Leftrightarrow q \therefore p$

$[(\sim p \wedge \sim q) \wedge (p \Leftrightarrow q)] \Rightarrow p$

p	q	~p	~q	~pΛ~q	p⇔q	(~pΛ~q)Λ(p⇔q)	(~pΛ~q)Λ(p⇔q)⇒p
D	D	Y	Y	Y	D	Y	D
D	Y	Y	D	Y	Y	Y	D
Y	D	D	Y	Y	Y	Y	D
Y	Y	D	D	D	D	D	Y

Yukarıdaki önerme son satırında yanlış değer aldığı için çıkarım geçersizdir.

İkinci yol: Öncüller aynısı gibi alınıp sadece sonuç önermesinin değillemesi alınarak önermelerin tutarlı olup olmadığına bakılır.

Örnek 1: $p \Rightarrow q,\ p \therefore q$ çıkarımının geçerli olup olmadığını denetleyelim. Bunun için, "o hâlde" ($\therefore$) işaretini atıp sonuç önermesinin değilini alırız. Böylece üç farklı önerme ortaya çıkar: $p \Rightarrow q$, p, $\sim q$. Şimdi, bu üç önermenin bir arada tutarlı olup olmadığına bakalım.:

p	q	~q	p⇒q	
D	D	Y	D	Tutarsız
D	Y	D	Y	
Y	D	Y	D	Çıkarım
Y	Y	D	D	geçerli

Yukarıdaki üç önermenin aynı satırda beraberce aldıkları doğru değeri olmadığı için bu önemeler tutarsızdır. Ancak çıkarım geçerlidir.

Sonucu değilllenmiş bir çıkarımın önermeleri tutarlı ise çıkarımın kendisi geçersiz, sonucu değilllenmiş bir çıkarımın önermeleri tutarsız ise çıkarımın kendisi geçerlidir.

Örnek 2: $p \Rightarrow q,\ \sim p \vee q \therefore q$ çıkarımının geçerliliğini denetleyelim:

$p \Rightarrow q,\ \sim p \vee q,\ \sim q$

p	q	~p	~q	p⇒q	~pvq	
D	D	Y	Y	D	D	
D	Y	Y	D	Y	Y	
Y	D	D	Y	D	D	
Y	Y	D	D	D	D	Geçersiz

Yukarıdaki önermeler bir arada tutarlı olduğundan çıkarım geçersizdir.

1. pv~q, p⇒q ∴ pΛ~q
2. ~(p⇔q), ~p ∴ ~q çıkarımlarının geçerliliğini birinci ve ikinci yolları kullanarak denetleyiniz.

Önermelerin Denkliğinin (Eş Değerliği) Denetlenmesi

İki önermenin birbirine denk (eş değer) olması, aynı satırda aynı doğruluk değerlerini almış olmalarını gerektirir.

p	q
D	D
D	D

p	q
D	D
Y	Y

p	q
Y	Y
Y	Y

denk

p	q
D	D
Y	D

p	q
D	Y
D	Y

denk değil

İki önermenin denk olup olmadığını anlamak için iki değişik yol kullanılabilir.

Birinci yol: Önermeler doğruluk tablosuyla ayrı ayrı denetlenir ve doğruluk değerleri birbiriyle karşılaştırılır. Aynı değerleri almışlarsa önermeler denktir.

Örnek 1: ~p⇒q, pvq önermelerinin denkliğini denetleyelim.

p	q	~p	~p⇒q	pvq
D	D	Y	D	D
D	Y	Y	D	D
Y	D	D	D	D
Y	Y	D	Y	Y

Önermeler denktir.

Bu iki önerme doğruluk tablosunun bütün satırlarında aynı değeri aldıkları için denktir.

Örnek 2: p⇔q, ~pv~q önermelerinin denkliğini denetleyelim:

p	q	~p	~q	p⇔q	~pv~q
D	D	Y	Y	D	Y
D	Y	Y	D	Y	D
Y	D	D	Y	Y	D
Y	Y	D	D	D	D

Önermeler denk değil.

Önermeler aynı satırlarda aynı değerleri almadıkları için denk değildir.

İkinci yol: Denkliği denetlemenin ikinci yolu, verilen iki önermeyi karşılıklı koşul (⇔) eklemiyle birbirine bağlamaktır. Elde edilen önermenin geçerliliği denetlenir. Eğer geçerliyse bu önermeyi oluşturan iki önerme birbirine denktir. Şimdi, yukarıdaki örnekleri ikinci yolla denetlemesini yapalım.

Örnek 1: ~p⇒q, pvq önermelerinin denkliğini denetleyelim:

(~p⇒q)⇔(pvq) (karşılıklı koşul önermesi)

p	q	~p	~p⇒q	pvq	(~p⇒q)⇔pvq)
D	D	Y	D	D	D
D	Y	Y	D	D	D
Y	D	D	D	D	D
Y	Y	D	Y	Y	D

Önermeler denktir.

Örnekteki karşılıklı koşul önermesi geçerli olduğuna göre, iki önerme birbirine denktir.

Örnek 2: p⇔q, ~pv~q önermelerinin denkliğini denetleyelim.

(p⇔q)⇔(~pv~q) (karşılıklı koşul önermesi)

p	q	~p	~q	p⇔q	~pv~q	(p⇔q)⇔(~pv~q)
D	D	Y	Y	D	Y	Y
D	Y	Y	D	Y	D	Y
Y	D	D	Y	Y	D	Y
Y	Y	D	D	D	D	D

Önermeler denk değildir.

Yukarıdaki karşılıklı koşul önermesi geçersiz olduğundan iki önerme birbirine denk değildir.

Bir karşılıklı koşul önermesi geçerli ise bu önermeyi oluşturan iki önerme birbirine denktir.

1. ~(pv~q), ~pΛq
2. ~(pΛ~q), p⇔q önermelerinin denkliğini birinci ve ikinci yolu kullanarak denetleyiniz.

c. Çözümleyici Çizelge

Doğruluk tablosunda denetleme yapılırken, önermelerin sayısı arttıkça işlem yapmak zorlaşır. Daha önce belirttiğimiz gibi, tek bir önermenin doğru ve yanlış olmak üzere iki, iki önermenin dört, üç önermenin sekiz, dört önermenin on altı farklı değeri vardır. Bu zorluğu ortadan kaldırmak için çözümleyici çizelge kullanılır.

Çözümleyici çizelge, bir ya da birden fazla önermenin doğrulayıcı ve yanlışlayıcı yorumlarını bir çizelge üzerinde belirtmeye yarar. Önermeler adım adım bileşenlerine ayrılır.

Çözümleyici çizelgenin bir takım temel kuralları vardır.

Çözümleme Kuralları

Çözümleyici çizelgede denetleme yapılırken, bütün önermeler tümel evetleme ve tikel evetlemenin kuralına indirgenerek çözümlenir.

Tümel Evetleme Önermesinin Çözümleme Kuralı

$p \wedge q$ gibi bir tümel evetleme önermesi çözümlenirken doğruluk tablosunda kullanılan kurallardan yararlanılır. Bu önermenin doğru olabilmesi için p ve q önermelerinin doğru olması gerektiğini daha önce görmüştük. Çözümleyici çizelgede her iki önermenin de doğru olduğunu belirtmek için alt alta yazılarak çözümlemesi yapılır. Yanına çözümleme sırasını belirtmek için numara verilir. Aynı numara, geldiği önermenin önüne kaynak numarası olarak yazılır. Buradaki çengel işareti ( ]) "ve" eklemini sembolize eder.

$$\boxed{\begin{array}{l} 1.\ p \wedge q \\ \quad \left.\begin{array}{l} p \\ q \end{array}\right] (1) \end{array}}$$

Tümel evetleme önermesinin çözümleme kuralı

İkiden fazla bileşeni varsa çözümlemesi aşağıdaki gibi yapılır.

$$\begin{array}{l} 1.\ p \wedge q \wedge r \\ \quad \left.\begin{array}{l} p \\ q \\ r \end{array}\right] (1) \end{array}$$

Örnek:

1. (pΛq)Λ(qΛp)

2. (p Λ q)
3. (q Λ p) (1)

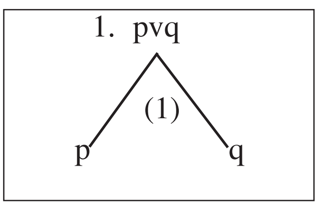
p
q (2)

q
p (3)

Tikel Evetleme Önermesinin Çözümleme Kuralı

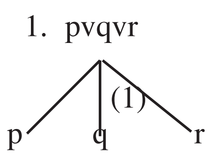
pvq gibi bir tikel evetleme önermesinin doğru olabilmesi p ya da q önermelerinden en az birinin doğru olması ile mümkündür. Dolayısıyla, tikel evetleme önermesinin doğru değer alması için ya p'nin ya da q'nun doğru olması gerekir. Bu durumu göstermek için çatal açma kuralı uygulanır.

Çatal açma kuralında birinci bileşen çatalın sol tarafına, ikinci bileşen çatalın sağ tarafına yazılır. Çözümlemeye başlarken çözümlenecek önermenin başına adım numarası yazılır. Aynı numara çatalın ortasına kaynak numarası olarak yazılır.

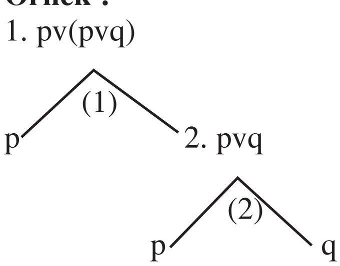


Tikel evetleme önermesinin çözümleme kuralı.

Üç ana bileşeni olan tikel önermenin çözümlenmesi şöyledir:



Örnek :



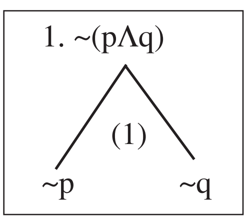
Türetilmiş Çözümleme Kuralları

Tümel evetleme ve tikel evetleme biçiminde olmayan önermeler için türetilmiş çözümleme kuralları uygulanır. Bu önermeler önce kendisine denk olan tümel evetlemeye ya da tikel evetlemeye dönüştürülür. Çözümleme, yukarıda gördüğümüz tümel evetleme ve tikel evetlemenin kurallarına göre yapılır. Aşağıdaki tabloda, **De Morgan Kuralları** adı verilen başlıca denklikler (eş değerlikler) verilmiştir.

Önerme		Eş değeri
$\sim(p \land q)$	$\equiv$	$\sim p \lor \sim q$
$\sim(p \lor q)$	$\equiv$	$\sim p \land \sim q$
$p \Rightarrow q$	$\equiv$	$\sim p \lor q$
$\sim(p \Rightarrow q)$	$\equiv$	$p \land \sim q$
$p \Leftrightarrow q$	$\equiv$	$(p \land q) \lor (\sim p \land \sim q)$
$\sim(p \Leftrightarrow q)$	$\equiv$	$(p \land \sim q) \lor (\sim p \land q)$

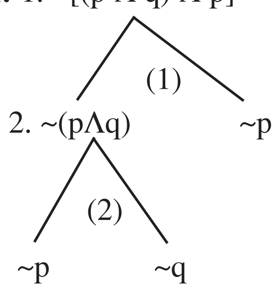
Tümel Evetleme Değillemesinin Çözümleme Kuralı

$p \land q$ önermesini yanlış yapan durum, aynı önermenin değillemesini doğru yapan durumdur. Değillenmiş tümel evetleme önermesini yanlış yapan iki seçenek olduğundan çatal açma kuralı uygulanır.



$\sim(p \land q) \equiv \sim p \lor \sim q$ denkliğinden türetilmiş tümel evetleme değillemesinin çözümleme kuralı.

Örnek: 1. $\sim[(p \land q) \land p]$



Tikel Evetleme Değillemesinin Çözümleme Kuralı

pvq önermesini yanlış yapan durum, her iki bileşenin de yanlış olduğu durumdur. Dolayısıyla, ~(pvq) önermesinin doğru değer alması ~p ve ~q önermelerinin doğru olmasına bağlıdır. Bu nedenle alt alta yazma kuralı uygulanır.

1. ~(p v q)

$\left.\begin{array}{l}\sim p \\ \sim q\end{array}\right]$ (1)

~(pvq)≡~pΛ~q denkliğinden türetilmiş tikel evetleme değillemesinin çözümleme kuralı.

Örnek: 1. ~[(pvq)vq]

2. $\left.\begin{array}{l}\sim (pvq) \\ \sim q\end{array}\right]$ (1)

$\left.\begin{array}{l}\sim p \\ \sim q\end{array}\right]$ (2)

Koşul Önermesinin Çözümleme Kuralı

Koşul önermesini yanlış yapan tek bir durum olduğunu daha önce görmüştük (ön bileşen doğru, art bileşen yanlışsa koşul önermesi yanlış, diğer durumlarda doğru). Bu durumda koşul önermesini doğru yapan iki seçenek vardır. Ya ön bileşen yanlış olmalı ya da art bileşen doğru olmalıdır. Dolayısıyla, ön bileşen yanlışsa koşul önermesi mutlaka doğru, art bileşen doğruysa koşul önermesi yine mutlaka doğrudur. Bu nedenle koşul önermesinde çatal açma kuralı uygulanır.

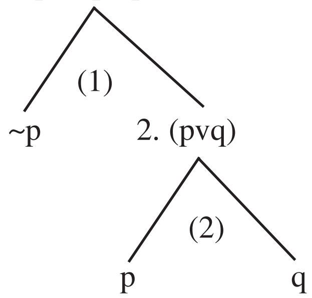
1. p⇒q

(1)

~p q

(p⇒q)≡(~pvq) denkliğinden türetilmiş koşul önermesinin çözümleme kuralı.

Örnek: 1. p⇒(pvq)



Koşullu Değillemesinin Çözümleme Kuralı

~(p⇒q) önermesinin doğru olması p⇒q önermesinin yanlış olmasına bağlıdır. p⇒q önermesini yanlış yapan tek bir durum olduğuna göre (p doğru, q yanlış ise yanlış), bu durum koşul önermesinin değillemesini doğru yapan durumdur. Koşul önermesinin değillemesini doğru yapan tek bir durum olduğuna göre, alt alta yazma kuralı uygulanır.

1. ~(p⇒q) p](1) ~q

~(p⇒q)≡p∧~q eşdeğerliğinden türetilmiş, koşullu değillemesinin çözümleme kuralı.

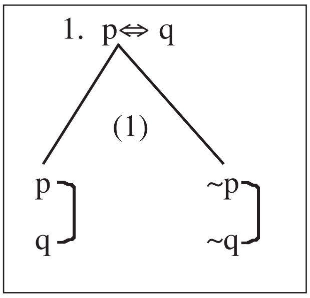
Örnek: 1. ~[p⇒(pvq)]

p](1)
2. ~(pvq)

~p](2)
~q

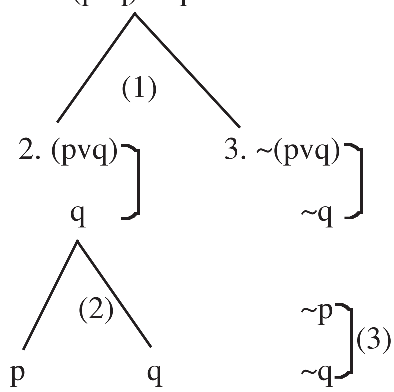
Karşılıklı Koşul Önermesinin Çözümleme Kuralı

Karşılıklı koşul önermesinin doğru olması için her iki bileşenin de aynı değeri almış olması gerekir. Bu durumda iki seçenekle karşı karşıya kalmış oluyoruz. Bu nedenle çatal açma kuralı uygulanmalıdır.



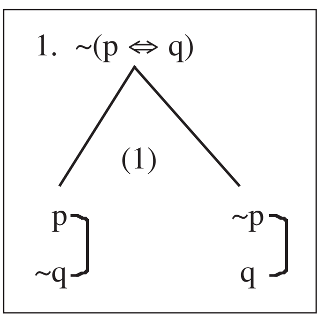
$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) v (\sim p \wedge \sim q)$ eşdeğerliğinden türetilmiş, karşılıklı koşul önermesinin çözümleme kuralı.

Örnek:



Karşılıklı Koşul Değillemesinin Çözümleme Kuralı

Karşılıklı koşul önermesini yanlış yapan durum (bileşenlerin farklı değer alması), karşılıklı koşul önermesini doğru yapar. Yani, p≡D ve q≡Y ya da p≡Y ve q≡D ise karşılıklı koşul değillemesi doğru olur. İki seçenek olduğuna göre çatal açma kuralının uygulanması gerekir.



$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) v (\sim p \wedge q)$ denkliğinden türetilmiş karşılıklı koşul değillemesinin çözümleme kuralı.

Örnek: 1. $\sim[(p \land q) \Leftrightarrow p]$

(1)

2. $(p \land q)$ 3. $\sim(p \land q)$

$\sim p$ p

p (2)   (3)

q $\sim p$ $\sim q$

Buraya kadar tüm önerme türlerinin ve onların değillenmiş durumlarının çözümleme kurallarını görmüş olduk. Şimdi bunları bir tablo halinde görelim.

Çözümleyici Çizelge Kuralları

Alt Alta Yazma Kuralları

1. Tümel evetlemenin çözümleme kuralı.

1. $p \land q$

p (1)
q

2. Tikel evetleme değillemesinin çözümleme kuralı

1. $\sim(p \lor q)$

$\sim p$ (1)
$\sim q$

3. Koşullu değillemesinin çözümleme kuralı

1. $\sim(p \Rightarrow q)$

p (1)
$\sim q$

Çatal Açma Kuralları

1. Tikel evetlemenin çözümleme kuralı

1. $p \lor q$

(1)

p q

2. Tümel evetleme değillemesinin çözümleme kuralı

1. $\sim(p \land q)$

(1)

$\sim p$ $\sim q$

3. Koşul önermesinin çözümleme kuralı

1. $p \Rightarrow q$

(1)

$\sim p$ q

4. Karşılıklı koşullunun çözümleme kuralı

1. $p \Leftrightarrow q$

(1)

p $\sim p$
q $\sim q$

5. Karşılıklı koşullu değillemesinin çözümleme kuralı

1. $\sim(p \Leftrightarrow q)$

(1)

p $\sim p$
$\sim q$ q

(pΛ~q)$\Rightarrow$(qΛ~p) önermesini çözümleyici çizelge ile çözümleyiniz. Yanıtlayamadıysanız başa dönüp konuyu tekrar edin.

Çözümleyici Çizelge İle Denetleme

Çözümleyici çizelge ile önermeler denetlenirken yapılması gereken işlem sırasını şöyle gösterebiliriz:

1. Çözümlenecek önermenin ana eklemi ve ana bileşenleri belirlenir.

2. Çözümleme kuralları uygulanmaya başlandığında önce alt alta yazma kuralı, sonra çatal açma kuralı uygulanır.

3. Aynı çözümleme kuralı ile çözümlenecek önerme varsa, çözümlemeye en üsttekinden başlanır.

4. Çatal açma kuralından sonra işlem devam ediyorsa çatalın sol tarafındaki önermeden devam edilir.

5. Alt alta yazılan önermeler dizisine **yol** denir. Çatal açma kuralı uygulandığında iki farklı yol ortaya çıkar.

6. Her çözümlemeden sonra, yol üzerinde birbiriyle çelişen önerme olup olmadığına bakılır. **Çelişki,** aynı yol üzerinde bir önermenin hem kendisinin hem de değilinin bulunması durumudur. Örneğin, p ve ~p önermesi birbiriyle çelişiktir. Aynı yol üzerinde böyle bir çelişik önerme varsa o yol kapatılır ve "X" işareti konur. Kapatılan yol üzerinde çözümlemesi yapılmamış önerme olsa bile artık işlem yapılamaz. Açık olan yollardan işleme devam edilir.

7. Çözümlenen önermelere sıraya göre adım numarası verilir. Aynı numara çözümlenmiş önermeye kaynak numarası olarak yazılır. Basit önermeler (p, q, ~p, ~q vb.) çözümleme gerektirmez. Bu nedenle, sadece çelişki ararken bakılır.

Aşağıdaki örnek, bu işlem akışını göstermektedir.

Örnek: (p$\Rightarrow$q) Λ (~pΛ~q) önermesini çözümleyelim: Görüldüğü gibi, ana eklem tümel evetleme (Λ), ana bileşenler (p$\Rightarrow$q) ile (~pΛ~q) önermesidir. Buna göre önce tümel evetleme kuralı uygulanarak başlanmalıdır. Önermenin başına adım numarası, sağ tarafına ise başlangıç önermesi olduğunu belirten (Ö) sembolü yazılır.

1. (p⇒q) Λ (~pΛ~q) (Ö)

3. (p⇒q)] (1)
2. (~pΛ~q)

~p] (2)
~q

(3)

~p q

X

Örnekteki önermenin ana eklemi tümel evetleme olduğu için önce alt alta yazma kuralı uygulandı. Her çözümleme basamağına çözümleme sırasına göre adım numarası ve kaynak numaraları yazıldı. Çözümleme sonunda ~q ile q önermesi aynı yol üzerinde olduğu için birbirleriyle çeliştiler ve bu yol kapatılarak "X" işareti kondu.

Önermelerin Tutarlılığının Denetlenmesi

Herhangi bir önermenin tutarlılığı denetlenirken, çözümleme kurallarının aynısı uygulanır. En az bir açık yol varsa önerme tutarlıdır. Çünkü, bu durum önermenin en az bir tane doğru değerine sahip olduğunu gösterir. Hiç açık yol yoksa önerme tutarsız demektir.

Örnek 1: (~pvq) Λ (pΛq) önermesinin tutarlılığını denetleyelim: Önermenin ana eklemi tümel evetleme (Λ) eklemidir. Bu nedenle çözümlemeye alt alta yazma kuralı uygulanarak başlanır.

1. (~pvq) Λ (pΛq) (Ö)

3. (~pvq)] (1)
2. (pΛq)

p] (2)
q

(3)

~p q

X Önerme tutarlıdır.

Çözümlemeye önermenin sağ tarafına adım numarasını, sol tarafına başlangıç önermesi olduğunu belirten (Ö) harfini koyarak başladık. Tümel evetleme kuralına göre bileşenleri alt alta yazdık. Görüldüğü gibi, elde edilen iki önermeden biri tümel evetleme diğeri tikel evetleme önermesidir. İşlem sırasına göre ilk önce tümel evetleme yapılacağı için, kural gereği tümel evetleme önermesini (2) çözümledik. Çelişki ortaya çıkmadığı için tikel evetleme önermesini (3) çözümledik. Böylece işlem tamamlandı. Ortaya çıkan iki yoldan birisinde p ve ~p önermeleri çelişti. Bu nedenle o yolu (X) işaretiyle kapattık. Diğer yol açık olduğu için çözümlediğimiz önerme tutarlı çıktı.

Örnek 2: 1. $p \wedge (p \Rightarrow \sim p)$ (Ö)

$$\left.\begin{array}{r} p \\ 2.\ (p \Rightarrow \sim p) \end{array}\right] (1)$$

(2)

~p	~p	
X	X	Önerme tutarsızdır.

Yukarıdaki örnekte, verilen önermenin ana eklemi tümel evetleme olduğu için birinci adımda alt alta yazarak çözümledik. İkinci adımda, koşul önermesini çözümleme kuralına göre ($p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ denkliği gereği) çatal açarak çözümledik. Her iki yolda çıkan ~p önermesi yukarıdaki p önermesi ile çeliştiği için önerme tutarsızdır.

Birden Fazla Önermenin Tutarlığının Denetlenmesi

Birden fazla önerme denetlenirken, kaç tane önerme verilmişse alt alta yazılır ve çözümleme kuralları uygulanır.

Örnek: p⇔q, p∧q, önermelerinin tutarlılığını denetleyelim.

p⇔q, p∧q,

2. p⇔q (Ö)

1. p∧q (Ö)

p
q (1)

(2)

p ~p
q ~q
X

Önermeler tutarlıdır.

1. ~(qvq)∧~p

2. p⇒q, p⇔~q

önermelerinin tutarlı olup olmadığını çözümleyici çizelge ile denetleyiniz. Yanıtlayamadıysanız konunun başına dönerek tekrar edin.

Önermelerin Geçerliliğinin Denetlenmesi

Bir önermenin geçerliliği denetlenirken, önermenin değili alınır ve değillenmiş hâli çözümlenir. Önermenin değillenmiş hâli çözümlendiğinde tüm yollar kapalıysa önerme geçerli demektir. Çünkü, tüm yollar kapalıysa önermenin değillenmiş hâli yanlış, kendisi ise doğru demektir. En az bir açık yol varsa önerme geçersizdir.

Örnek : (~p∧q)⇒(p∧~q) önermesinin geçerliliğini denetleyelim:

(~p∧q)⇒(p∧~q) (Ö)

1. ~[(~p∧q)⇒(p∧~q)] (~Ö)

2. (~p∧q)
3. ~(p∧~q) (1)

~p
q (2)

(3)

~p q

Önerme geçersizdir.

Yukarıdaki örnekte, önce önermenin değili alındı. Sonra çözümleme kurallarına göre değillenmiş önerme çözümlendi. Çözümleme sonunda bütün yollar açık olduğundan önerme geçersizdir.

Çıkarımların Geçerliliğinin Denetlenmesi

Çözümleyici çizelge ile çıkarımların geçerliliği de denetlenebilir. Bunun için, önce sonuç önermesinin değili alınır. Daha sonra öncüller ve sonuç ayrı önermelermiş gibi alt alta yazılır. Birden fazla önermenin çözümleme kuralında gördüğümüz biçimiyle önerme çözümlenir. Çözümleme sonunda tüm yollar kapalıysa çıkarım geçerli demektir. Tek bir açık yol varsa çıkarım geçersizdir. Çünkü, açık yol varsa, bu öncüller ile sonucun değilinin aynı anda doğru değer aldığını gösterir. Dolayısıyla çıkarımın kendisinin (değillenmemiş hâlinin) öncülleri doğru, fakat sonucu yanlış değer almış demektir ki bu da çıkarımı geçersiz kılar.

Örnek 1: $p \Rightarrow q, \sim p \therefore \sim q$ çıkarımının geçerliliğini denetleyelim.:

$p \Rightarrow q, \sim p \therefore \sim q$

1. $p \Rightarrow q$ (Ön)

$\sim p$ (Ön)

q (~Sn)

(1)

$\sim p$ $\quad$ q $\quad$ Çıkarım geçersizdir.

Yukarıdaki örnekte, öncülleri ve sonucun değilini alt alta yazdık. Öncülleri "Ön", sonuç önermesinin değilini ise "~Sn" ile gösterdik. Koşul önermesini çözümleme kuralına göre çözümledik. Sonuçta ortaya çıkan yollardan her ikisi de açıktır. Bu durumda, çıkarım geçersizdir.

Örnek 2 : $p \land q, \sim p \Rightarrow q \therefore p$

1. $p \land q$ (Ön)

$\sim p \Rightarrow q$ (Ön)

$\sim p$ (~Sn)

p

q (1)

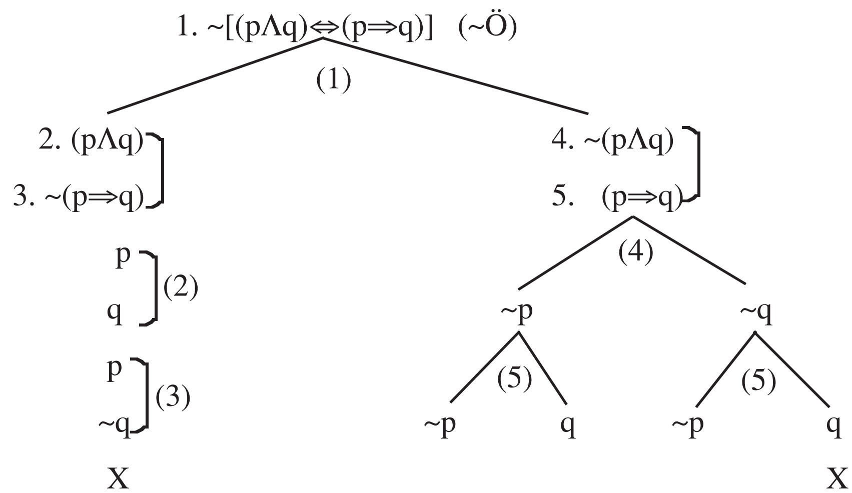
X $\quad$ Çıkarım geçerlidir.

p⇒~q, ~q∧r ∴ p⇒r çıkarımının geçerli olup olmadığını denetleyiniz. Yanıtlayamazsanız, çözümlemeyi nasıl yapacağınızı daha iyi anlamak için konuyu tekrar edin.

Önermelerin Denkliğinin (Eş değerliğinin) Denetlenmesi

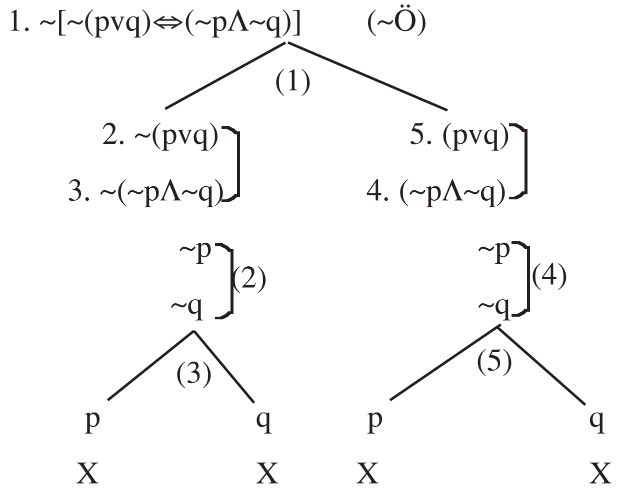
Çözümleyici çizelgede önermelerin denkliğini denetlemek için, önce veri-len iki önerme birbirine karşılıklı koşul eklemiyle (⇔) bağlanır. Daha sonra önermenin değili alınır ve değillenmiş önerme çözümleme kurallarına göre çözümlenir. Tüm yollar kapalıysa önermeler denktir. Çünkü, değillenmiş önermede tüm yollar kapalı ise önermenin kendisi geçerlidir. Yani, tüm değerleri doğru demektir. Karşılıklı koşul önermesinde tüm değerlerin doğru çıkması demek, bu önermenin bileşenlerinin aynı değeri aldığını gösterir (Karşılıklı koşul önermesinin doğruluk tablosunda anlatılan kurallarını yeniden gözden geçirin).

Örnek 1: p∧q, p⇒q önermelerinin denkliğini denetleyelim.



Önermeler denk değildir.

Örnek 2: ~(pvq), (~p∧~q) önermelerinin denk olup olmadığını çözümleyici çizelge ile denetleyelim. Önermeleri önce karşılıklı koşul eklemiyle birbirine bağlayalım: ~(pvq) ⇔ (~p∧~q). Son olarak değilini alıp denetlemeye başlayalım.



Önermeler denktir.

Bütün yollar kapalı olduğu için bu iki önerme denktir ve bu durum ~(pvq) ≡ (~pΛ~q) biçiminde gösterilir.

~(pΛq), ~pv~q önermelerinin denk olup olmadığını önce doğruluk tablosuyla, sonra çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

2. Niceleme Mantığı (Yüklemler Mantığı)

Önermeler mantığı önermeleri nitelik yönünden ele aldığı için önermelerin niceliğini göstermede yetersizdir. Örneğin, "Bazı hayvanlar dört ayaklıdır." ve "Bütün hayvanlar canlıdır." önermelerini ele alalım. Önermeler mantığında bu önermeler birer basit önermedir ve p, q gibi sembollerle gösterilir. Ne var ki, bu önermelerden birincisi tikel, ikincisi tümel bir önermedir. Bir önermeyi p, q gibi sembollerle sembolleştirdiğimizde onun tümel mi ya da tikel mi olduğunu anlayamayız. Yani niceliği konusunda bize bilgi vermez. Bu nedenle niceleme mantığına gereksinim duyulmuştur. Niceleme mantığı, önermeler mantığının bu tür eksikliklerini ortadan kaldırır ve önermelerin ve çıkarımların daha ayrıntılı sembolleştirilmesini sağlar.

Önermeler mantığında kullandığımız bütün mantık değişmezleri (~, ∧, v, ⇒, ⇔) niceleme mantığında da kullanılır. Ayrıca, niceleme mantığının kendine özgü değişmezleri vardır.

Niceleme mantığında sembolleştirme şöyle yapılır:

• Önermelerin öznesi a, b, c..... gibi sembollerle gösterilir. Bunlara **ad sembolleri** denir.

• Önermelerin yüklemleri F, G, H gibi sembollerle gösterilir.

Örneğin, "Filiz konuşkandır." önermesini alalım. "Filiz" öznesini "a" harfi ile, "konuşkandır" yüklemini F harfi ile sembolleştirelim. Bu durumda, "a, F'dir." gibi bir ifade ortaya çıkacaktır. Niceleme mantığında bu önerme, önce yüklem sembolü, daha sonra ad sembolü biçiminde yazıldığı için, yukarıdaki önermenin en son biçimi "Fa" olacaktır.

Ad sembolü	a, b, c ≡ Gül, Namık, Zeynep
Yüklem sembolü	F, G, H ≡ çalışmak, gitmek, yürümek, konuşmak

Aşağıdaki örnekler değişik sembolleştirmeleri göstermektedir.

Handan doktordur.	≡ Fa
Osman öğretmen değildir.	≡ ~Fa

Niceleme mantığında, önermenin yüklemi tek bir önermeye aitse **birli yüklem,** iki özneye aitse **ikili yüklem,** üç özneye aitse **üçlü yüklem**, n sayıda özneye aitse **n'li yüklem** adını alır. Demek ki, önermelerde birden fazla özne bulunabilir. Örneğin; "Fatih ve Yasemin evlidir." önermesinde iki özne (Fatih ve Yasemin), bir tane yüklem (evlidir) bulunmaktadır. Bu durumda, bu önermeyi "Fab" biçiminde sembolleştirebiliriz. Aynı biçimde, "Canan, Mehmet ve Fatih kardeştir." önermesini "Fabc" biçiminde sembolleştirmek gerekir.

Aşağıdaki örnekler birden fazla yüklemi olan sembolleştirmeleri göstermektedir.

Gökhan ve Gülen evlidir ≡ Fab
Cengiz, Filiz ve Kardelen bencil değildir. ≡ ~Fabc

Niceleme mantığında bileşik önermeleri aynı kurallara uyarak sembolleştirebiliriz. Örneğin, "Öğretmen güzel anlatırsa biz kolay öğreniriz." önermesi bileşik bir önermedir ve aşağıdaki gibi sembolleştirilir.

$\underset{a}{\underline{\text{Öğretmen}}}\ \underset{F}{\underline{\text{güzel anlatır}}}\ \underset{\Rightarrow}{\underline{\text{ise}}}\ \underset{b}{\underline{\text{biz}}}\ \underset{G}{\underline{\text{kolay öğreniriz}}}.$

Dolayısıyla, önermeler mantığında $p \Rightarrow q$ biçiminde sembolleştirilen bir önerme, niceleme mantığında $Fa \Rightarrow Gb$ biçiminde sembolleştirilir.

	Önermeler Mantığı	Niceleme Mantığı
Kemal çalışkandır.	p	Fa
Ayşe çirkin değildir.	$\sim p$	$\sim Fa$
O gelirse ben giderim.	$p \Rightarrow q$	$Fa \Rightarrow Gb$
Ahmet çalışkan ve zekidir.	$p \land q$	$Fa \land Ga$

Aynı kurallar çıkarıma da uygulanabilir.

"Su sıcaksa denize gireceğim.

Su sıcaktır.

O hâlde, denize gireceğim." çıkarımını ele alalım.

Birinci öncül $Fa \Rightarrow Gb$, ikinci öncül Fa, sonuç ise Gb biçiminde sembolleşir. Bu durumda çıkarım $Fa \Rightarrow Gb,\ Fa\ \therefore\ Gb$ biçimini alır. Aynı çıkarım önermeler mantığında $p \Rightarrow q,\ p\ \therefore\ q$ biçiminde sembolleştirilir.

"Barış uzun boylu ise öğretmen onu seçecek." önermesini niceleme mantığıyla sembolleştiriniz.

a. Niceleyiciler ve Açık Önermeler

Her önermenin öznesi "Ahmet, Ali, Ayşe" gibi her zaman açıkça belirli olmaz. Bir önerme, belirsiz bir kişiyi ya da nesneyi özne olarak alabilir. Bu tür önermelerde belirsiz olan özneyi göstermek için x, y, z gibi semboller kullanılır. Bu sembollere **değişken** adı verilir.

İçinde x, y, z gibi değişkenler geçen önermelere açık önerme denir.

Örneğin, "x öğretmendir.", "$y + 4 = 9$" gibi önermeler birer açık önermedir.

Açık önermeyi önerme haline getirmek için, içinde bulunan x, y, z gibi değişkenlerin yerine belirli bir terim konur. Böylece önerme bir doğruluk değerine sahip olur. Örneğin; "x öğretmendir." önermesinin bir doğruluk değeri yoktur.

Ancak x yerine "Ali" terimini koyduğumuzda "Ali öğretmendir." önermesi bir doğruluk değerine sahip olacaktır.

Bir açık önermeyi, önerme hâline getirmek için kullandığımız tüm terimler kümesine **evren** denir ve E: { } biçiminde gösterilir. Verilen evrendeki değerleri değişkenin yerine koyma işlemine **özelleme**, bu şekilde elde edilen önermelere de **özelleme önermesi** adı verilir.

Evrenden seçtiğimiz değerlerin bir kısmı önermeyi doğru kılarken, bir kısmı yanlış kılabilir. Evrene ait bir değerin özelleme önermesini doğru kılmasına **gerçekleme** adı verilir.

Örnek 1:

Açık önerme: "x tek sayıdır."	E: {1, 2, 3, 4, 5}
1 tek sayıdır.	Özelleme (D)- Gerçekleme
2 tek sayıdır.	Özelleme (Y)
3 tek sayıdır.	Özelleme (D)- Gerçekleme
4 tek sayıdır.	Özelleme (Y)
5 tek sayıdır.	Özelleme (D)-Gerçekleme

Örnek 2:

Açık önerme: "x filozoftur."	E: {Socrates, Cevat, Abbas, Banu}
Sokrates filozoftur.	Özelleme (D)- Gerçekleme
Cevat filozoftur.	Özelleme (Y)
Abbas filozoftur.	Özelleme (Y)
Banu filozoftur.	Özelleme (Y)

Önermelerin niceliğini gösteren "bütün", "bazı", "tüm", "kimi" gibi terimlere **niceleyici** adı verilir. Niceleme mantığında tümel ve tikel niceleyici olmak üzere iki tür niceleyici vardır.

Tümel niceleyici "$\forall$" sembolüyle gösterilir ve tüm, bütün, her, hiçbir, hepsi vb. anlamlara gelir.

Tikel niceleyici "$\exists$" sembolüyle gösterilir ve bazı, kimi, bir kısım vb. anlamlara gelir.

Buraya kadar görmüş olduğumuz kuralları uygulayarak içinde tümel ve tikel niceleyici geçen önermeleri de sembolleştirebiliriz.

Örneğin, "x fotosentez yapar." açık önermesini ele alalım. E: {bitkiler} olarak alınırsa, evrendeki değerlerin tümü "x fotosentez yapar." önermesini gerçekler (doğrular). Bu durum, klâsik mantıkta “Tüm bitkiler fotosentez yapar." biçiminde, niceleme mantığında "Tüm x’ler için x fotosentez yapar." biçiminde ifade edilir. "Tüm x’ler" yerine "∀x", "x fotosentez yapar." yerine de "Fx" sembollerini koyduğumuzda, "∀xFx" tümel önermesini elde ederiz.

Şimdi, yukarıdaki önerme için verdiğimiz evreni değiştirelim. Bu kez evren, E: {canlılar} olsun. Bu durumda, evrende verilen değerlerin bir kısmı "x fotosentez yapar." açık önermesini gerçeklerken (doğrular), bazı değerler bu önermeyi gerçeklemez (yanlışlar). Bu durumu klasik mantıkta "Bazı canlılar fotosentez yapar." biçiminde ifade ederken, niceleme mantığında "Bazı x’ler için, x fotosentez yapar." biçiminde ifade ederiz. "Bazı x’ler" yerine "∃x", "x fotosentez yapar." yerine de "Fx" koyarsak, "∃xFx" tikel önermesini elde ederiz.

Aynı kuralları çıkarıma uygulayarak çıkarımları da sembolleştirebiliriz.

"Her insan değerlidir.

Duygu insandır.

O hâlde, Duygu değerlidir."

çıkarımını sembolleştirelim. Bu çıkarımda, "değerlidir", "insandır" ve "Duygu" olmak üzere üç tane değişmez vardır.

"insandır"	: F (yüklem değişmezi)
"değerlidir"	: G (yüklem değişmezi)
"Duygu"	: a (ad değişmezi)

biçiminde sembolleştirilirse çıkarım; "Her F, G’dir.", "a F’dir." ∴ "a G’dir." biçiminde ifade edilir. "Her F, G’dir." önermesini niceleme mantığında "Her x için x F ise, x G’dir." biçiminde dile getiririz. "Her x için" yerine "∀x" konursa, "Her insan değerlidir." önermesi ∀x (Fx ⇒ Gx) biçiminde sembolleştirilir. "Duygu insandır." önermesi Fa ile "Duygu değerlidir." önermesi Ga ile sembolleştirilirse, çıkarım ∀x (Fx⇒Gx), Fa ∴ Ga biçiminde sembolleştirilir.

Niceleme mantığında, tümel niceleyici ile kurulmuş açık önermelerin özellemeleri yapılırken elde edilen önermeler birbirlerine tümel evetleme eklemi (Λ) ile bağlanırlar.

Örnek 1: ∀x (x hayvandır.) E: {kedi, aslan, yılan} olsun. Evrende verilmiş olan değerleri açık önermede yerine koyarak özellemeyi yapalım.

"Kedi hayvandır." (D)

"Aslan hayvandır." (D)

"Yılan hayvandır." (D)

Elde edilen önermeleri birbirine tümel evetleme eklemiyle bağlayıp, doğruluk değerlerini yerine koyduğumuzda,

DΛDΛD≡D değerini elde ederiz.

Örnek 2: ∀x (x hayvandır.) E: {taş, demir, kuş} olsun. Evrendeki değerleri değişkenlerde yerlerine koyarak özellemeyi yapalım.

"Taş hayvandır." (Y)

"Demir hayvandır." (Y)

"Kuş hayvandır." (D)

Bu durumda, elde ettiğimiz önermenin doğruluk değeri;

YΛYΛD≡Y olur.

Niceleme mantığında tikel niceleyici ile kurulmuş açık önermelerin özellemeleri yapılırken, elde edilen önermeler tikel evetleme eklemiyle (v) bağlanırlar.

Örnek 1: ∃x (x madendir.) E: {altın, gümüş, krom} olsun. Evrendeki değerleri değişkenin yerine koyalım.

"Altın madendir." (D)

"Gümüş madendir." (D)

"Krom madendir." (D)

Önermeleri tikel evetleme eklemiyle birbirine bağlarsak, elde ettiğimiz önermenin doğruluk değeri;

DvDvD≡D olur.

Örnek 2: $\exists x$ (x madendir.) E: {defter, insan, kalem} olsun. Evrendeki değerleri değişkenin yerine koyarsak;

"Defter madendir." (Y)

"İnsan madendir." (Y)

"Kalem madendir." (Y) önermelerini buluruz. Bu önermeleri tikel evetleme eklemiyle birleştirirsek önermenin doğruluk değeri;

$Y \vee Y \vee Y \equiv D$ olur.

Gerçekleme işlemini karmaşık önermeler üzerinde de yapabiliriz.

Örnek: $\forall x$ (x sıvıdır.) $\Rightarrow$ $\exists x$ (x gazdır) E: {helyum, su} olsun. Evrende verilmiş olan değerleri değişkenlerin yerine koyalım.

[(Helyum sıvıdır.) $\wedge$ (su sıvıdır.)] $\Rightarrow$ [(helyum gazdır.) v (su gazdır.)]

Y D D Y

$(Y \wedge D) \Rightarrow (D \vee Y)$

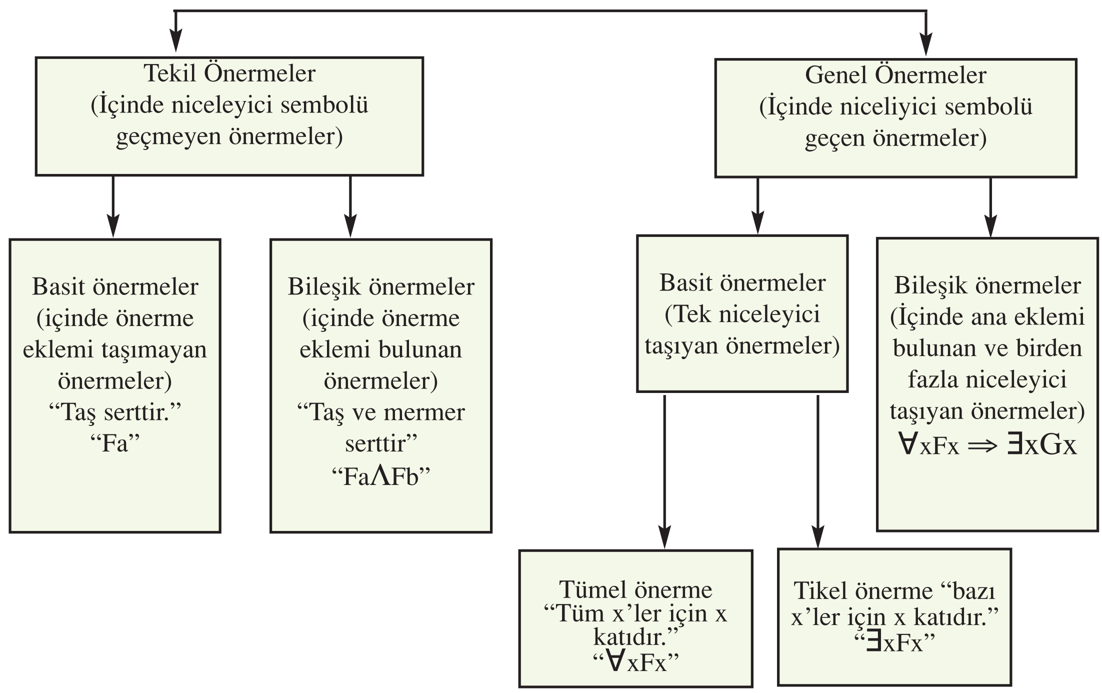
$Y \Rightarrow D \equiv D$ değerini alır.

1. $\forall x$ (x katıdır.) açık önermesini E: {silgi, kalem, oksijen} evreninde;

2. $\exists x$ (x çift sayıdır.) açık önermesini E: {1, 3, 5,7} evreninde gerçekleyip doğruluk değerini bulunuz.

Bu bilgilerin ışığında, niceleme mantığındaki önermeleri aşağıdaki gibi sınıflandırabiliriz.

ÖNERMELER



b. Yorumlama, Tutarlılık, Geçerlilik, Denklik

Sembolleştirilmiş bir önermeyi yorumlama, önermeye bir anlam vermek demektir. Yorumlama yapabilmek için de bir evrenin verilmesi gerekir. Evrendeki değerler sembolik önermeye uygulanarak yorumlama yapılır.

Örnek 1: Fa önermesinde F: akıllıdır, a: Ali olsun

Bu durumda, "Ali akıllıdır." yorumunu elde ederiz.

Örnek 2: ∀xFx açık önermesinde E: {Ali, Veli} evreni verilsin.

Bu durumda önermenin yorumu,

(Ali akıllıdır) ∧ (Veli akıllıdır) biçiminde olur.

Örnek 3: ∀xFx ⇒ ∃xFx açık önermesinde E: {Ali, Veli} olsun. Bu durumda önermenin yorumu,

[(Ali akıllıdır.) ∧ (Veli akıllıdır.)] ⇒ {(Ali akıllıdır.) v (Veli akıllıdır.)] biçiminde olur.

Niceleme mantığında önermelerin tutarlılık, geçerlilik ve denklik denetlemesi yapılabilir. Bunu yaparken çözümleyici çizelgenin özellikleri kullanılır.

Ayrıca, niceleme mantığının **niceleyici değilleme kuralları** ve **özelleme kuralları** olmak üzere kendine özgü kuralları da vardır.

Niceleyici Değilleme Kuralları

Oldukça basit bir biçimde, tümel ve tikel önermeleri birbirine dönüştürmeyi sağlayan kurallardır. Tümel ve tikel niceleyici değilleme kuralı olmak üzere ikiye ayrılır.

Tümel Niceleyici Değilleme Kuralı

$\sim\forall xFx \equiv \exists x{\sim}Fx$ biçiminde ifade edilir. Değillenmiş tümel önerme yerine ona denk olan tikel önerme yazılır.

Örneğin, $\sim\forall x\ (Fx \Rightarrow Gx)$ önermesini bu kurala göre çözümlersek,

1. $\sim\forall x\ (Fx \Rightarrow Gx)$

$\exists x \sim(Fx \Rightarrow Gx)$ (1) sonucunu buluruz.

Tikel Niceleyici Değilleme Kuralı

$\sim\exists xFx \equiv \forall x{\sim}Fx$ biçiminde ifade edilir. Değillenmiş tikel önerme yerine, özdeşi olan tümel önerme yazılır.

Örneğin, $\sim\exists x\ (Fx \vee Gx)$ önermesini bu kurala göre çözümleyelim.

1. $\sim\exists x\ (Fx \vee Gx)$

$\forall x{\sim}(Fx \vee Gx)$ (1) sonucunu buluruz.

Özelleme Kuralları

Özelleme kuralları da tümel özelleme ve tikel özelleme olarak ikiye ayrılır.

Tümel Özelleme Kuralı

Çözümleyici çizelgede işlem yapılırken $\forall xFx$ gibi bir tümel önermenin özellemesini yapmak için aynı yol üzerinde daha önce geçmiş bir ad sembolü (a, b, c gibi) varsa x bilinmeyeni yerine o ad sembolü yazılır. Eğer daha önce geçmiş bir ad sembolü yoksa, herhangi bir sembol kullanılır. Çözüm yapılan yol üzerinde bir-den fazla ad sembolü geçiyorsa, bu ad sembollerinin her biri ile tümel önermenin ayrı ayrı özellemesi yapılır. Tümel özelleme yapılırken tümel niceleyici ($\forall$) kalkar, sadece yüklem sembolü kalır.

Örnek: $\forall xFx$, Fb $\therefore$ Gb çıkarımının geçerliliğini denetleyelim: Önce öncüller ile sonucun değili alt alta yazılır (daha önce anlattığımız çıkarımların geçerliliği konusuna bakınız).

1. ∀xFx,	(Öncül)
Fb	(Öncül)
~Gb	(~Sonuç)
Fb (1)	yol açık olduğundan çıkarım geçersizdir.

Tikel Özelleme Kuralı

Çözümleyici çizelgede işlem yapılırken ∃xFx gibi bir tümel önermenin özellemesini yapmak için, aynı yol üzerinde daha önce geçmiş bir ad sembolü (a, b, c gibi) varsa o ad sembolünden farklı bir sembol kullanılır. Eğer daha önce geçmiş bir ad sembolü yoksa, herhangi bir ad sembolü kullanılır. Tikel özelleme yapılırken tikel niceleyici (∃) kalkar, sadece yüklem sembolleri kalır.

Örnek: ∃xFx, Gb ∴ Ga çıkarımının geçerliliğini denetleyelim:

1. ∃xFx	(Ön)
Gb	(Ön)
~Ga	(~Sn)
Fc (1)	Çıkarım geçersizdir.

Niceleme mantığında denetleme yapılırken aşağıda gösterilen öncelik sırasına göre işlem yapılır.

1. Tümel niceleyici değilleme kuralı
2. Tikel niceleyici değilleme kuralı
3. Alt alta yazma kuralları
4. Tikel özelleme kuralı
5. Çatal açma kuralları
6. Tümel özelleme kuralı

c. Çözümleyici Çizelge İle Denetleme

Önermelerin Tutarlılığının Denetlenmesi

Daha önce gördüğümüz gibi, bir önermenin tutarlı olması işlem sonunda en az bir tane açık yol olması demektir. Tüm yollar kapalı ise önerme tutarsızdır.

Örnek 1: $\exists xFx \land \exists xGx$ önermesinin tutarlılığını denetleyelim: İşlem sırasına göre alt alta yazma kuralını uygulamamız gerek. Çünkü, ilk iki maddede belirtilen tümel ve tikel niceleyici değilleme kurallarını uygulamak için önermelerin değillerinin verilmesi gerekirdi. Değilleri olmadığı için üçüncü sıradan başlayabiliriz.

1. $\exists xFx \land \exists xGx$ (Ö)

$$\left.\begin{array}{l} 2.\ \exists xFx \\ 3.\ \exists xGx \end{array}\right\}(1)$$

Fa (2)

Gb (3) Önerme tutarlıdır.

Yukarıdaki örnekte, önce alt alta yazma kuralı uygulandı. Son olarak 2 ve 3 nolu önermeler tikel önerme olduğu için tikel özelleme kuralı uygulandı. Ortaya çıkan tek yol açık olduğundan, önerme tutarlıdır.

Örnek 2: $\exists x\,(Fx \land {\sim}Fx)$ önermesinin tutarlılığını denetleyelim:

1. $\exists x\,(Fx \land {\sim}Fx)$ (Ö)
2. $(Fa \land {\sim}Fa)$ (1)

$$\left.\begin{array}{l} Fa \\ {\sim}Fa \end{array}\right\}(2)$$

X Önerme tutarsızdır.

Örnek 3: Son örneğimiz $\forall xFx \lor \forall xGx$ gibi bir tümel önerme olsun.

1. $\forall xFx \lor \forall xGx$ (Ö)

(1)

2. $\forall xFx$ 3. $\forall xGx$

Fa (2) Ga (3) Önerme tutarlıdır.

Önermelerin Birlikte Tutarlılığının Denetlenmesi

Birden fazla önerme verilmişse, önermelerin tutarlılığını denetlemek için önce bu önermeler alt alta yazılır ve çözümleme kuralları ile niceleme kurallarına uygun olarak çözümlenir. Açık yol varsa önermeler tutarlıdır.

Örnek 1: $\sim\forall xFx$, $\sim\exists xFx$ önermelerinin bir arada tutarlı olup olmadığını denetleyelim:

$\sim\forall xFx$, $\sim\exists xFx$

1. $\sim\forall xFx$, (Ö)
2. $\sim\exists xFx$ (Ö)
3. $\exists x\sim Fx$ (1)
4. $\forall x\sim Fx$ (2)

$\sim Fa$ (3)

$\sim Fa$ (4) Önermeler Tutarlıdır.

Örnek 2: $\forall xHx$, $\sim Ha$ önermelerinin birlikte tutarlılığını denetleyelim:

$\forall xHx$, $\sim Ha$

1. $\forall xHx$ (Ö)

$\sim Ha$ (Ö)

Ha (1)

X Önermeler tutarsızdır.

Niceleme mantığında çözümleyici çizelge ile tutarlılık denetlemesi ile önermeler mantığında çözümleyici çizelge ile tutarlılık denetlemesini karşılaştırın. Benzerlik ve farklılıklar nelerdir?

Önermelerin Geçerliliğinin Denetlenmesi

Bir önermenin geçerliliği denetlenirken önce o önermenin değili alınır. Çözümleme sonucunda tüm yollar kapalıysa önerme geçerlidir (çünkü değilli önerme tutarsızdır). Açık bir yol varsa önerme geçersizdir (çünkü değilli önerme tutarlıdır). Gördüğünüz gibi, daha önce önermeler mantığında gördüğümüz kuralların aynısını uyguluyoruz. "Değillenmiş bir önerme tutarlı ise önermenin kendisi geçersizdir, değillenmiş önerme tutarsız ise önermenin kendisi geçerlidir." önerme kuralını hatırladınız mı? Örneğin, $\sim(\forall xFx \Rightarrow \exists xFx)$ önermesi tutarlı ise, o zaman geçersiz demektir.

Örnek 1: $\forall xFx \Rightarrow \exists xFx$ önermesinin geçerliliğini denetleyelim: Önce önermenin değilini alarak işleme başlayacağız.

1. $\sim(\forall xFx \Rightarrow \exists xFx)$ (~Ö)

3. $\forall xFx$
2. $\sim\exists xFx$ (1)

4. $\forall x{\sim}Fx$ (2)

Fa (3)

$\sim Fa$ (4)

X Önerme geçerlidir.

Yukarıdaki örnekte, önermenin geçerliliğini denetlemek için önce önermenin değilini aldık. Birinci adımda, koşullu değillemesinin kuralını uygulayarak alt alta yazdık. İkinci adımda tikel niceleyici değilleme kuralını uyguladık. Üçüncü ve dördüncü adımda ise, her iki önermede tümel olduğu için tümel özelleme kuralını uyguladık. Ortaya çıkan tek yol çelişti. Bu nedenle önerme geçerlidir.

Örnek 2: $\exists xFx \wedge \exists xGx$ önermesinin geçerliliğini denetleyelim:

1. $\sim(\exists xFx \wedge \exists xGx)$ (~Ö)

(1)

2. $\sim\exists xFx$ 4. $\sim\exists xGx$

3. $\forall x{\sim}Fx$ (2) 5. $\forall x{\sim}Gx$ (4)

$\sim Fa$ (3) $\sim Ga$ (5) Önerme geçersizdir.

$\forall xFx \vee \forall xGx$ önermesinin geçerli olup olmadığını denetleyiniz.

Çıkarımların Geçerliliğinin Denetlenmesi

Niceleme mantığında çıkarımların da geçerliliği denetlenebilir. Çıkarımın geçerliliğini denetlemek için, daha önce önermeler mantığında yaptığımız gibi, çıkarımda verilen öncülleri aynen alıp, sadece sonucun değilini alacağız. Çözümleme sonunda tüm yollar kapalı ise çıkarım geçerli, en az bir açık yol varsa çıkarım geçersizdir.

Örnek 1: $\forall xFx$, Ga $\therefore$ Fa çıkarımının geçerliliğini denetleyelim:

1. $\forall xFx$ (Ön)

   Ga (Ön)

   ~Fa (~Sn)

   Fa (1)

   X Çıkarım geçerlidir.

Örnek 2: $\exists xFx \therefore \exists x(Fx \wedge Gx)$ çıkarımının geçerliliğini denetleyelim:

2. $\exists xFx$ (Ön)

1. $\sim\exists x(Fx \wedge Gx)$ (~Sn)

3. $\forall x\sim(Fx \wedge Gx)$ (1)

   Fa (2)

4. $\sim(Fa \wedge Ga)$ (3)

   (4)

~Fa ~Ga

X Çıkarım geçersizdir.

Önermelerin Denkliğinin (Eş Değerliğinin) Denetlenmesi

Verilen iki önermenin denkliğini denetlemek için, önermeler karşılıklı koşul eklemiyle ($\Leftrightarrow$) birbirine bağlanır. Daha sonra elde edilen önermenin değillemesi alınır. Değillenmiş önermenin çözümlenmesi sonucunda, bütün yollar kapalıysa başlangıçta verilen önermeler denktir. Açık tek bir yol varsa, önermeler denk değildir.

Örnek 1: ~∀xFx, ∃x~Fx önermelerinin denkliğini denetleyelim:

1. ~[(~∀xFx) ⇔ (∃x~Fx)]

(1)

2. ~∀xFx   7. ∀x Fx

3. ~∃x~Fx   6. ∃x~Fx

4. ∃x~Fx (2)   ~Fa (6)

5. ∀xFx (3)   Fa (7)

~Fa (4)   X

Fa (5)

X   Önermeler denktir.

Örnek 2: ∃xFx, ∀xFx önermelerinin denkliğini denetleyelim:

1. ~(∃xFx ⇔ ∀xFx)

(1)

3. ∃xFx   5. ~∃xFx

2. ~∀xFx   6. ∀xFx

4. ∃x~Fx (2)   7. ∀x~Fx (5)

Fa (3)   Fa (6)

~Fb (4)   ~Fa (7)

X

Bir tane açık yol bulunduğu için önermeler denk değildir.

~∃x~Fx, ∀xFx önermelerinin denk olup olmadığını denetleyiniz.

B. ÇOK DEĞERLİ MANTIK

İki değerli mantıkta önermeler, doğru ve yanlış olmak üzere iki değer alabilir. Çünkü özdeşlik, çelişmezlik ve üçüncü hâlin olanaksızlığı ilkelerine göre, önermeler başka bir değer alamaz. Bu üç ilkeye göre önermeler ya doğrudur ya da yanlış. Ancak bu durum bir takım önermelerin değerini belirlememizi engeller. Örneğin, "Bu yaz tatile gideceğim." biçimindeki bir önermeye, geleceğe ilişkin bir bilgi verdiği için doğru ya da yanlış diyemeyiz. Bu türden önermelerin doğru ya da yanlış olması olasıdır, ancak kesin değildir. Bu gelişmeler çok değerli mantığın gelişmesine neden olmuştur.

Önermelerin ikiden fazla değere sahip olabileceklerini kabul eden mantık sistemine çok değerli mantık denir.

Çok değerli mantık içinde, özellikle üç değerli mantık günümüzde önem kazanmıştır. Üç değerli mantık yanında dört değerli mantık ve hatta sonsuz değerli olasılık mantığı kurulmuştur. Biz sadece üç değerli mantığa ilişkin bazı özellikleri göreceğiz.

İki değerli mantıkta önermelerin doğru ve yanlış olmak üzere iki değeri bulunurken, üç değerli mantıkta bu değerlere bir de "belirsiz" değeri eklenmektedir. Bu durumda, örneğin bir "p" önermesi doğru, yanlış ve belirsiz değerler almaktadır. Üç değerli mantığın doğruluk değerleri aşağıdaki gibidir:

Doğru	D	1
Yanlış	Y	0
Belirsiz	B	1/2

Üç değerli mantık, iki değerli mantıkta kullanılan "değil" (~), "ve" (Λ), "veya" (v), "ise" (⇒), "ancak ve ancak" (⇔) gibi mantıksal değişmezleri aynı biçimde kullanır. Ancak doğruluk tablosu farklıdır. İki değerli mantıkta sadece iki değer olduğundan tek bir önermenin doğruluk tablosu iki, iki önermenin doğruluk tablosu dört satırdan oluşuyordu. Üç değerli mantıkta ise tek bir önermenin doğruluk tablosunda üç, iki önermenin dokuz satırı bulunur.

p	~p
D	Y
B	B
Y	D

“p” önermesi doğruyken, “~p” önermesi yanlış, “p” önermesi belirsizken “~p” önermesi de belirsiz, “p” önermesi yanlışken “~p” önermesi doğru değer alır.

Üç değerli mantıkta önerme eklemleri ile oluşturulan bileşik önermelerin alabileceği doğruluk değerleri aşağıdaki gibidir:

p	q	p$\wedge$q	pvq	p$\Rightarrow$q	p$\Leftrightarrow$q
D	D	D	D	D	D
D	B	B	D	B	B
D	Y	Y	D	Y	Y
B	D	B	D	D	B
B	B	B	B	D	D
B	Y	Y	B	B	B
Y	D	Y	D	D	Y
Y	B	Y	B	D	B
Y	Y	Y	Y	D	D

C. KİPLİK MANTIĞI

Daha öncede açıkladığımız gibi kiplik, önermenin dile getirdiği durumun gerçek, zorunlu ve mümkün olup olmaması halidir. Önermeler kiplerine göre gerçek, zorunlu ve mümkün olarak üçe ayrılır. Kiplik mantığı zorunlu ve mümkün önermeleri kapsayan mantıktır.

Kiplik mantığında, zorunlu eklemi ile kurulan önermelere zorunlu önerme, mümkün eklemi ile kurulan önermelere de mümkün (olanaklı) önerme denir.

Zorunlu eklemi " □" sembolüyle, mümkün önerme "◊" sembolüyle gösterilir. Bu sembollere **kiplik değişmezleri** adı verilir. Kiplik değişmezleri, verilen bir önermeden yeni bir önerme oluşturmaya yarar.

Kiplik Değişmezleri	
Zorunlu	□
Mümkün	◊

Pamuğun yumuşak olması zorunludur = p zorunludur = □p	
Pamuğun yumuşak olması mümkündür = p mümkündür = ◊p	

Kiplik mantığı, kiplik değişmezleri yanı sıra, önermeler mantığındaki mantıksal değişmezleri de (~, Λ, v, ⇒, ⇔) kullanır.

Zorunluluk kipiyle kurulan bir önermenin doğruluğu, gerçek dünyada olduğu gibi tüm olası dünyalarda da zorunludur. Yani, zorunluluk kipiyle kurulmuş bir önermeyi her zaman böyle bir zorunluluk varmış gibi düşüneceğiz.

Mümkünlük kipiyle kurulmuş bir önermenin doğruluğu ise, en az bir dünya için (gerçek dünyada ya da var olabilecek başka bir dünyada) doğrudur. Dolayısıyla, kiplik mantığında önermelerin alabileceği doğruluk değerleri aşağıdaki gibi olacaktır.

Önerme	**p**	**□p**	**◊p**
1. Pamuk yumuşaktır.	D	Y	D
2. Pamuk yumuşaktır veya pamuk yumuşak değildir.	D	D	D
3. Pamuk yumuşak değildir.	Y	Y	D
4. Pamuk yumuşaktır ve pamuk yumuşak değildir.	Y	Y	Y

"Pamuk yumuşaktır." önermesi gerçek dünya açısından doğrudur. Çünkü gerçek dünyada pamuğun yumuşak olduğunu biliyoruz. En az bir dünyada doğru olduğu için bu önerme mümkünlük kipiyle (◊) yazıldığında doğru (D) değer alır. Ancak, pamuğun yumuşak olmadığı başka olası dünyalar olduğunu farz edersek, bu önerme zorunluluk kipinde (□) yanlış (Y) değer alır. Çünkü, eğer başka bir dünyada pamuk yumuşak değilse, bizim zorunlu olarak bahsettiğimiz önerme yanlış demektir.

□p önermesinin doğru olması, yalnız gerçek dünyada değil, diğer tüm olanaklı dünyalarda da doğru olmasına bağlıdır.

◊p önermesinin doğru olması, gerçek dünyada ya da diğer tüm olanaklı dünyaların sadece birinde doğru olmasına bağlıdır.

Zorunlu önermelerin doğruluğu tüm dünyalarda ve gerçek dünyadaki doğruluğuna bağlı olduğundan **mantıksal doğruluğu** gösterir. Mümkün önermelerin doğruluğu, herhangi bir dünyadaki doğruluğa bağlı olduğundan **olgusal (gözlenebilen) doğruluğu** gösterir.

D. ÖZDEŞLİK MANTIĞI

Özdeşlik mantığı niceleme mantığına benzemekle birlikte, onu da içine alan daha kapsamlı bir mantıktır. Bu nedenle, niceleme mantığında geçen tüm mantıksal değişmezler (∀, ∃) ve önermeler mantığında geçen mantıksal değişmezler (~, Λ, v, ⇒, ⇔) özdeşlik mantığında da geçerlidir. Ayrıca özdeşlik mantığının kendine özgü değişmezleri vardır.

Daha önce gördüğümüz gibi, özdeşlik ilkesi bir şeyin kendisiyle özdeş olduğunu ifade etmekteydi. Özdeşlik mantığında "özdeş", bir mantık değişmezidir ve "≡" sembolüyle gösterilir. Özdeşlik değişmezi, özdeşlik önermesinin öznesi ve yükleminin birbirine eşit ya da özdeş olduğunu gösterir. Örneğin, a≡b önermesi özdeşlik önermesidir. Bu önermede a ile b arasındaki ilişki ikili bir yüklemdir. Yani iki ad sembolü (a, b) ve bir yüklem sembolü (eşittir) vardır.

Örneğin, "Everest dağı dünyanın en yüksek dağıdır." önermesini ele alalım.

"Everest dağı" a sembolü ile, "Dünyanın en yüksek dağı" b sembolüyle gösterilebilir. "dır" eki de "≡" sembolüyle gösterilebilir. Böylece yukarıdaki önerme a ≡ b biçiminde sembolleştirilir.

E. VARLIK MANTIĞI

Varlık mantığı, özdeşlik mantığının mantık değişmezlerine "var" sözcüğünün eklenmesiyle elde edilmiş bir mantık sistemidir. Niceleme ve özdeşlik mantığı sadece gerçek dünyaya ait varlıklar üzerinde önermeler oluştururken, varlık mantığı hem gerçek dünyada hem de gerçek olmayan dünyalardaki varlıklar üzerine önermeler oluşturur. Yani, insan zihninde hayal ürünü olarak bulunan varlıklar için de önermeler oluşturur. Örneğin, "Everest tepesi vardır." dediğimizde, "Everest tepesi" gerçek dünyada var olan bir ad iken, "Aşk tanrısı Eros vardır.", "Kaf dağı vardır." vb. dediğimizde gerçek dünyada var olmayan adlardan bahsediyoruz demektir. Varlık mantığı, bunun gibi gerçek dünyada var olmayan varlıkları da ad olarak ele alır.

"Vardır." biçiminde ifade edilen mantık değişmezi "E!" sembolüyle gösteri-lir. Örneğin, "Anka kuşu vardır." önermesi "E!a" biçiminde sembolleştirilir. Burada "Anka kuşu" a harfiyle, "vardır" E! İle sembolleştirilmiştir.

Gerçek dünyada var olmayan varlıklarla yapılmış önermelerin niceleme mantığında kurulması olanaklı değildir. Çünkü, niceleme mantığında bu tür önermeler yanlış değer alır. Niceleme mantığında "Kaf Dağı vardır." önermesi yanlış, ancak "Alp dağları vardır." önermesi doğru değer alır.

ÖZET

Bu ünitede sembolik mantığın konusunu oluşturan, önermeler mantığının, niceleme mantığının ve çok değerli mantığın yapısını ve kurallarını inceledik.

Modern mantık; iki değerli mantık, çok değerli mantık, kiplik mantığı, özdeşlik mantığı ve varlık mantığından oluşmaktadır. Modern mantığın amacı geçerli çıkarımlara ulaşmaktır. Bu amaçla çıkarımlar sembolleştirilir ve denetlenir.

Bir önermenin doğru ve yanlış, yani sadece iki değerli olarak alındığı mantığa iki değerli mantık adı verilir. İki değerli mantık, önermeler mantığı ve niceleme mantığı olmak üzere ikiye ayrılır.

Önerme eklemleri mantığında önermeler sembolik dile çevrilerek tutarlılık, geçerlilik ve eş değerliği denetlenebilir. En az bir doğru yorumu bulunan bir öner-meye tutarlı, bütün değerleri doğru olan bir önermeye geçerli, bütün değerleri aynı olan iki önermeye denk (eş değer) adı verilir. Önermeler hem doğruluk tablosuyla hem de çözümleyici çizelge ile denetlenebilir. Önermeler mantığında bir takım mantık değişmezleri kullanılır. Bunlar, değilleme eklemi (~), tümel evetleme eklemi (Λ), tikel evetleme eklemi (v), koşul eklemi (⇒) ve karşılıklı koşul (⇔) eklemidir.

Niceleme mantığında ise bu değişmezlere her (∀) ve bazı (∃) eklenir. Özdeşlik mantığında niceleme mantığı değişmezlerine özdeşlik (≡) değişmezi ilave edilir. Varlık mantığında varlık değişmesi “var” sözcüğüyle ifade edilir ve (E!) sembolüyle gösterilir. Ayrıca çok değerli mantık sistemlerinden biri olan üç değerli mantıkta, doğru, yanlış ve belirsiz değerleri kullanılır. Üç değerli mantığın değişmezleri, iki değerli önermeler mantığının, değilleme, tümel evetleme, tikel evetleme, koşul ve karşılıklı koşul ekleminden oluşur. Fakat üç değer kabul edildiği için bunların temel doğruluk çizelgeleri değişiktir.

ARAŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

a. Bir yargı bildiren ve bir doğruluk değeri olan cümlelere .... denir.

b. İçinde önerme eklemi geçen önermelere .... denir.

c. Olumlu bir ifadeyi olumsuz, olumsuz bir ifadeyi olumlu yapan önerme eklemine .... eklemi denir.

d. "İse" sözcüğüyle ifade edilen ekleme .... denir.

e. Yorumlarından en az birisinin doğru olduğu önermeye .... denir.

f. Bütün değerleri doğru olan önermeye .... denir.

g. Sembolleştirilmiş önermelere doğru ya da yanlış değer verilmesine .... denir.

h. İki önermenin .... olması demek, aldıkları değerlerin birbirinin aynı olması demektir.

2. Aşağıdaki önermelerin ana eklem ve ana bileşenini bularak, önermeleri ana eklemine göre tanımlayınız.

a. $p \Rightarrow \sim q$

b. $(p v q) \Lambda r$

c. $p \Leftrightarrow [(q \Rightarrow p) \Lambda (p \Rightarrow q)$

d. $[(p \Rightarrow q) v (\sim p \Rightarrow \sim q)]$ v $(\sim p \Leftrightarrow q)$

3. Aşağıdaki önermelerden hangilerinin basit, hangilerinin bileşik olduğunu gösteriniz.

a. Güneş her zaman ısıtır.

b. İnsanlar arasında eşitlik olursa herkes mutlu olur.

c. Ancak ve ancak sıcaklık sıfırın altına inerse su donar.

d. İnsan okur.

e. Düşünüyorum o hâlde varım.

4. Aşağıdaki önermelerde p yerine D, q yerine Y yazarak doğruluk değerlerini bulunuz.

a. $p \Rightarrow \sim q$

b. $(p v q) \Lambda \sim q$

c. $\sim p \Leftrightarrow [(q \Rightarrow p) \Lambda (p \Rightarrow q)$

d. $[(p \Rightarrow q) v (\sim p \Rightarrow \sim q)]\ v\ (\sim p \Leftrightarrow q)$

e. $[(p \Lambda q) \Rightarrow (\sim p v q)] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

5. Aşağıdaki önemelerin tutarlılığını doğruluk tablosuyla denetleyiniz.

a. $p \Rightarrow q$

b. $(\sim p v \sim q) \Lambda p$

c. $p \Leftrightarrow [(\sim q \Rightarrow \sim p) \Lambda (p \Rightarrow q)]$

d. $(p \Rightarrow q) \Lambda (\sim p \Rightarrow \sim q)$

e. $(p v q) \Leftrightarrow \sim q$

6. Aşağıdaki önermelerin tutarlı olup olmadığını çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

a. $\sim(p \Rightarrow \sim q)$

b. $(p v q) \Lambda r$

c. $p \Leftrightarrow [(q \Rightarrow p) \Lambda (p \Rightarrow q)$

d. $\sim(p v q) v \sim(p \Lambda q)$

e. $\forall x\ (Fx \Rightarrow \sim Fx)$

f. $\exists x Fx \Leftrightarrow \exists x \sim Fx$

g. $\forall x\ (Fx \Rightarrow Gx),\ \exists x\ (Fx\ \Lambda\ \sim Gx)$

DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Aşağıdaki önermelerden hangisi basit önermedir?

A) Ay her zaman beyazdır. B) Ya gelirsin ya gidersin.

C) Ne geldi ne de gitti. D) Gelirse gitmez.

2. $\sim[(p \Rightarrow q) \vee (p \Leftrightarrow r)] \wedge r$ önermesinin ana eklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) Tikel evetleme eklemi. B) Koşul eklemi.

C) Karşılıklı koşul eklemi. D) Tümel evetleme eklemi.

3. p önermesi doğru, q önermesi yanlış ise, aşağıdakilerden hangisi "doğru" değer alır?

A) $p \Rightarrow q$ B) $p \Leftrightarrow q$

C) $p \vee q$ D) $p \wedge q$

4. İki önerme bir arada kaç değer alabilir?

A) Bir B) İki

C) Dört D) Sekiz

5. "Ali hem çalışıyor hem okuyor." önermesinin önermeler mantığında sembolik ifadesi hangisidir?

A) $p \Rightarrow q$ B) $p \wedge q$

C) $p \Leftrightarrow q$ D) $p \vee q$

6. Aşağıdaki önermelerin hangisinde mantıksal bir hata yapılmıştır?

A) Kan kırmızı değil yeşildir.

B) Hiçbir sarışın, sarışın değildir.

C) Bazı politikacılar yalancıdır.

D) Bütün sınavlar zordur.

7. "Bütün derslerin zor olduğu doğru değildir." önermesinin niceleme mantığındaki ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) ~∀xFx B) ~∀x~Fx

C) ~∃xFx D) ∃x~Fx

8. "Her insanın iyi olduğu doğru değildir." (~∀xFx) önermesinin eş değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) Her insan iyidir (∀xFx)

B) Hiçbir insan iyi değildir (∀x~Fx)

C) Bazı insanlar iyi değildir. (∃x~Fx)

D) Her insanın iyi olmadığı doğru değildir. (~∀x~Fx)

9. Aşağıdaki kavramlardan hangisi kiplik gösterir?

A) Değil B) Var

C) Özdeş D) Zorunlu

10. Aşağıdakilerden hangisi p ile q önermelerinin denk olduğunu gösterir?

A) p⇒q önermesinin tutarlı olması

B) p∧q önermesinin geçerli olması

C) p⇔q önermesinin geçerli olması

D) pvq önermesinin tutarlı olması