

### IV. Ünite: SEMBOLİK MANTIK: C-Niceleme / Yüklemler Mantığı – “Özet”

*Mantık, hakikate sevk eden zihin işlemlerinin bilimi ...*

Önermeler mantığının önermelerin içyapısını, niceliğini ifade etmedeki yetersizliğinden dolayı yeni bir mantık sistemine gerek duyulmuştur: Niceleme mantığı. Niceleme mantığında yalnızca bileşik önermelerin değil, basit önermelerin yapısı ve niceliği de sembolleştirilmektedir. Böylece önerme ve çıkarımların daha kesin ve güvenli denetlenmesi imkânı sağlanmıştır. Basit önermeleri de konu/özne ve yüklemeleri bakımından sembolleştirmeyi esas aldığından yüklem mantığı diye de adlandırılan bu mantık sistemi, önermeler mantığından daha kapsamlı iki değerli mantık alanıdır.

Öncelikle Niceleme /Yüklemler Mantığının temel kavramları ve sembolleştirilmesi ile ilgili bilgileri özetleyelim:

**DEĞİŞMEZ:** Kendi içinde daha küçük anlamlı birimlere ayırlamayan deyimlere/sözcüklere denir. Mantık değişmezleri ve özel değişmezler olmak üzere iki gruba ayrılırlar.

**a- Mantık değişmezleri:** eklemler, niceleyiciler; mantığın bütün konularında kullanılırlar: ( $\sim$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$ ,  $\forall$ ,  $\exists$ , (...), {...}, [...],  $\therefore$ )

**b- Özel değişmezler:** ad /terim/ konu/ özne ve yüklem değişmezleridir.

**Ad /konu değişmezleri** (a, b, c, d ..) gibi küçük harflerle sembolleştirilirler.

**Yüklem değişmezleri** ( F, G, H, A, B, ..) gibi büyük harflerle sembolleştirilirler.

**Örnekler:**

1.) “Tebeşir beyazdır.” (Konu/terim/özne/ad: *tebeşir* (a) | Yüklem: “*beyazdır.*” “F” | a F  $\equiv$  F a ) Önermeler mantığında (p) biçiminde sembolleştirilen “Tebeşir beyazdır.” Önermesi, yüklem mantığında (Fa) biçiminde sembolleştirilir.

2.) “1 tek sayı ise 2 çift sayıdır.” ( F a  $\Rightarrow$  H b )

3.) “Platon ve Aristoteles filozofturlar.” ( F a  $\wedge$  F b )

**Not:** Niceleme mantığında önermenin yüklemi; tek bir özneye/konuya ait ise 1’li yüklem, 2 özneye ait ise 2’li yüklem, 3 özneye ait ise 3’lü yüklem n sayıda özneye aitse n’li yüklem adını alır. Önermelerde birden fazla yüklem bulunabilir. Önermede geçen aynı ad ve yüklem aynı sembollerle gösterilir.

Sembolleştirmede önce yüklem, sonra terim/ ad/özne sembolü yazılmalıdır.

4.) “Dört üçten büyüktür.” (a B b  $\equiv$  B a b) (2’li yüklemli)

5.) “Yalova, Karamürsel ile Orhangazi arasındadır.” ( F a b c ) (3’lü yüklemli)

6.) “Hava güzel olursa Adalar’a gideceğim. Hava güzeldir. O halde Adalar’a gideceğim.” Çıkarımı şöyle sembolleştirilebilir: ( G h  $\Rightarrow$  F a, G h  $\therefore$  F a )

## IV. Ünite: SEMBOLİK MANTIK: C-Niceleme / Yüklemler Mantığı – “Özet”

*Mantık, hakikate sevk eden zihin işlemlerinin bilimi ...*

**TEKİL ÖNERME:** İçinde herhangi bir niceleyici bulunmayan, nicelik bildiren bir ifade geçmeyen önermedir. Yukarıda geçen örneklerdeki önermeler tekil önermelerdir. Basit veya bileşik olabilirler. (  $F a \Rightarrow H b$  gibi.)

**NİCELEYİCİ:** Önermelerin niceliğini belirten “her, bütün, bazı, kimi, hiçbir ” gibi terimlere niceleyici denir. Niceleyiciler bir açık önermeyi gerçekleyen nesnelerin / adların sayısı hakkında bilgi veren değişken bağlacıdır.

**TÜMEL NİCELEYİCİ:** “Her, bütün, tüm, hepsi, hiçbir” anlamına gelen ( $\forall$ ) sembolüyle gösterilen niceleyicidir. Birli açık önermenin özellemelerinin tümü doğru olduğunda ancak doğru bir önermeyi oluşturan niceleyicidir. Ana eklemi tümel niceleyici olan önermeye *tümel niceleme önermesi* denir.

“Bütün x 'ler için x ağırdır.” gibi bir önerme, *tümel niceleme önermesidir*. ( $\forall xFx$ ) biçiminde sembolleştirilir.

**TİKEL NİCELEYİCİ:** “Bazı, bir kısım, kimi, en az bir” anlamına gelen ( $\exists$ ) sembolüyle gösterilen niceleyicidir. Birli açık önermenin özellemelerinden en az biri doğru olduğunda ancak doğru bir önermeyi oluşturan niceleyicidir. Ana eklemi tikel niceleyici olan önermeye *tikel niceleme önermesi* denir. “Bazı x'ler için x katıdır.” önermesi, *tikel niceleme önermesidir*. ( $\exists xFx$ ) biçiminde sembolleştirilir.

**GENEL ÖNERME:** İçinde niceleyici geçen önermeye genel önerme denir. Genel önermeler de basit veya bileşik olabilir.

### NİCELEME MANTIĞINDA ÖNERMELER

TEKİL ÖNERMELER (İçinde niceleyici geçmeyen)		GENEL ÖNERMELER (İçinde niceleyici geçen)		
BASİT	BİLEŞİK	BASİT	BİLEŞİK	
Fa Gb	Fa $\wedge$ Fb ~ Fa	TÜMEL $\forall xFx$	TİKEL $\exists xFx$	$\forall xFx \Rightarrow \exists xFx$ ~ $\forall xFx$

Tablo: Niceleme Mantığında Önerme Türleri

**AÇIK ÖNERME:** İçinde en az bir değişken geçen önermedir. Bu değişkenler yerine bir ad/konu/özne konulduğunda doğru ya da yanlış değerler alabilen önermeler açık önermedir. Bir önerme *belirsiz* bir *nesne* veya *kişiyi* özne/konu olarak alabilir. Bu tür önermelerde belirsiz olan özneyi/konuyu göstermek için  $x, y, z$  gibi değişken sembolleri kullanılır.

$Fx$  : “x çiçektir.”  $x$  yerine, “menekşe (m)” terimini, yani ad değişmezini/bireysel değişmezini yerleştirdiğimizde,  $Fx$  açık önermesi artık doğruluk değerini alan kapalı bir önerme olur: (F m: Menekşe çiçektir.)

Bir açık önermeyi, doğruluk değeri alacak bir önerme haline getirmek için kullandığımız tüm değerler kümesine **evren** denir. **E**: {...} biçiminde gösterilir. **E**: {papatya, gül, menekşe, şebboy, yonca, ağaç } gibi.

Verilen evrende bulunan değerlerin (terimlerin) değişkenin yerine konulmasına **özelleme**; böyle elde edilen önermeye de **özelleme önermesi** adı verilir.

Bir açık önermede verilen evrendeki her değer için yapılan özellemelerin toplamına **açılım** denir. Açılımda yer alan önermeler açık önermeyi doğru kılabileceği gibi yanlışlayabilir. E evrenine ait değerlerden en az birinin özellenen önermeyi doğrulamasına **gerçekleme** denir.

### IV. Ünite: SEMBOLİK MANTIK: C-Niceleme / Yüklemler Mantığı – “Özet”

*Mantık, hakikate sevk eden zihin işlemlerinin bilimi ...*

#### Örnekler:

E: {1,2,3,4,5,6,7,8,9}

Px: “x tek sayıdır.”  $X_1 : 1$  “1 tek sayıdır.”  
Gerçekliyor.)

$x_2 : 2$  “2 tek sayıdır.” (Gerçeklemiyor.)

E: {papatya, gül, menekşe, şebboy, yonca, ağaç, taş}

Çz: “z çiçektir.”  $z_1$ : papatya “Papatya çiçektir.”  $z_2$ :  
ağaç “Ağaç çiçektir.”

➤ Genel Önergelerin / İçinde niceleyici geçen  
önergelerin açılımı yapılırken;

*Tümel Nicelemede* ( $\forall$ ), özelleme önergeleri tümel  
evetleme ( $\wedge$ ) eklemiyle birbirine bağlanır.

*Tikel Nicelemede* ( $\exists$ ) ise, özelleme önergeleri tikel  
evetleme ( $\vee$ ) eklemiyle birbirine bağlanır.

➤  $\forall x Px$  *tümel önermesinde* ( $Px$ ) ,  $\forall x$   
niceleyicisinin etki alanıdır.  $\exists x Gx$  *tikel*  
*niceleme önermesinde* ise,  $\exists x$  niceleyicisinin etki  
alanı ( $Gx$ ) tir.

➤ Genel önergelerin doğruluk değeri verilen  
evrene bağlıdır:

◆ Tümel Niceleme Önermesi, verilen E'deki  
elemanların tüm özellemelerinde  
gerçekleniyorsa (D) , en az biri tarafından  
yanırlanıyorsa (Y) değerini alır. (Tümel  
evetlemenin doğruluk ilkesinde olduğu gibi)

◆ Tikel Niceleme Önermesi, verilen E'deki  
elemanların en az bir özellemesinde  
gerçekleniyorsa (D), hiçbir özellemesinde  
gerçeklenmiyorsa, yani özellemelerinin  
tümünün yanırlması halinde (Y) değerini  
alır.(Tikel evetlemenin doğruluk ilkesinde  
olduğu gibi)

#### ÖSYS Sorularından Örnekler:

➤  $\forall x(Fx \Rightarrow Gx)$  önermesinin "E : {a, b}"  
evrenindeki açılımı aşağıdakilerden  
hangisidir?

A)  $(Fa \Rightarrow Ga) \vee (Fb \Rightarrow Gb)$

B)  $(Fa \Rightarrow Gb) \wedge (Fb \Rightarrow Ga)$

C)  $(Fa \wedge Ga) \Rightarrow (Fb \wedge Gb)$

D)  $(Fa \Rightarrow Ga) \wedge (Fb \Rightarrow Gb)$

E)  $(Fb \wedge Ga) \Rightarrow (Fa \wedge Gb)$

( Cevap: D / 2008 - ÖSS)

➤ " $\forall x$  (x metaldir)" önermesi aşağıdakilerin  
hangisinde verilen evrende doğrudur?

A) {Altın, Demir, Bakır}

B) {Kurşun, Cıva, Plastik}

C) {Kalay, Kum, Çimento}

D) {Nikel, Cam, Naylon}

E) {Kağıt, Krom, Kauçuk}

( Cevap: A / 1998 - ÖYS)

➤ "Her x için x sıfırdan büyüktür." [ $\forall x (x > 0)$ ] açık  
önermesi tam sayıları evreninde yanırlı; doğal  
sayılar evreninde doğru değerini alır.

**Buna göre, bir tümel önermenin, verilen bir  
evrende doğru değerini alması için  
aşağıdakilerden hangisi gereklidir?**

A) Evrene ait tüm nesnelere gerçekleşmesi

B) Evrenin alt kümelerinde yanırlması

C) Evrenin kapsamının dar olması

D) Evrenin sonsuz sayıda nesnelere oluşması

E) Evrende en az bir özellemesinin doğru olması

( Cevap: A / 1986-ÖYS)

### IV.Ünite: SEMBOLİK MANTIK: C-Niceleme / Yüklemler Mantığı – “Özet”

*Mantık, hakikate sevk eden zihin işlemlerinin bilimi ...*

- ❖ “Bütün insanlar akıllıdır.” tümel önermesi ( $\forall x Fx$ ) biçiminde sembolleştirilir ve “bütün x’ler için x akıllıdır.” anlamına gelir. Aynı tümel niceleme önermesi daha ayrıntılı olarak şöyle de sembolleştirilebilir:  $\forall x(\dot{I}x \Rightarrow Fx)$  “Bütün x’ler için, x insan ise akıllıdır.” anlamına gelir.
- ❖ “Bazı öğrenciler gözlüklüdür.” ( $\exists xFx$ ) tikel niceleme önermesi de ayrıntılı olarak şöyle sembolleştirilebilir:  $\exists x(Fx \wedge Gx)$  “Bazı x’ler için x hem öğrenci, hem de gözlüklüdür.” diye okunur. Tümel niceleme önermesinde ( $\Rightarrow$ ), tikel nicelemede ise ( $\wedge$ ) eklemine dikkat ediniz.
- ❖ “Hiçbir öğrenci tembel değildir.”  $\equiv \forall x \sim Tx$   
 $\equiv \forall x \sim (\dot{O}x \Rightarrow \sim Tx)$
- ❖ “Bütün öğrencilerin tembel olduğu doğru değildir.”  $\equiv \sim \forall x Tx \equiv \sim \forall x (\dot{O}x \Rightarrow Tx)$
- ❖ “Bazı çiçekler güzel kokar.”  $\equiv \exists xGx$   
 $\equiv \exists x (\dot{C}x \wedge Gx)$
- ❖ “Bazı çiçekler güzel kokmaz.”  $\equiv \exists x \sim Gx$   
 $\equiv \exists x (\dot{C}x \wedge \sim Gx)$
- ❖ “Bazı çiçeklerin güzel koktuğu doğru değildir.”  $\equiv \sim \exists x Gx \equiv \sim \exists x (\dot{C}x \wedge Gx)$
- ❖ “Her sayının sonlu olduğu doğru değildir.”  $\equiv \sim \forall x Sx \equiv \exists x \sim Sx \equiv$  “Bazı sayılar sonsuzdur.”
- ❖ “Bazı hastalıklar bulaşıcıdır.”  $\equiv \exists xBx$
- ❖ “Bazı hastalıkların bulaşıcı olduğu doğru değildir.”  $\equiv \sim \exists xBx$

#### NİCELEME / YÜKLEMLER MANTIĞINDA DENETLEME

Niceleme Mantığında önermelerin tutarlılık, geçerlilik, eşdeğerlik, çıkarımların geçerlilik denetlemesi yalnızca çözümleyici çizelgeyle yapılabilir. Önermeler / Eklemler mantığında geçerli olan kurallar niceleme mantığında da aynen geçerlidir. Tekil önermelerin çözümlenip denetlenmesinde önermeler mantığının çözümlenme kuralları yeterlidir.

Ancak, genel önermelerin çözümlenip denetlenmesinde önermeler mantığının çözümlenme kuralları yanında niceleme mantığına özgü kurallar da uygulanır:

a.) Niceleyici değilleme kuralları ve

b.) Özelleme kuralları. Ayrıca niceleme/yüklemler mantığında çözümlenmede işlem akışının kendine özgü sırası vardır. Bu işlem akışı şu sıradadır:

1. Tümel niceleyici değilleme kuralı
2. Tikel niceleyici değilleme kuralı
3. Alt alta yazma kuralları
4. Tikel özelleme kuralı
5. Çatal açma kuralları
6. Tümel özelleme kuralı

## IV. Ünite: SEMBOLİK MANTIK: C-Niceleme / Yüklemler Mantığı – “Özet”

*Mantık, hakikate sevk eden zihin işlemlerinin bilimi ...*

I.) Niceleyici değilleme kuralları: Bu kurallar tümel ve tikel önermelerin birbirine dönüştürülmesini sağlar. Niceleyicilerin önündeki değillemelerin kaldırılması ve böylelikle eşdeğeri olan önermenin elde edilmesi imkanını hazırlar.

a-) Tümel niceleyici değilleme kuralı:

$$\sim \forall x Fx \equiv \exists x \sim Fx$$

b-) Tikel niceleyici değilleme kuralı:

$$\sim \exists x Fx \equiv \forall x \sim Fx$$

Bu kurallardan şu eşdeğerlikler elde edilir:

$\sim \forall x \sim Fx \equiv \exists x Fx$	$\forall x \sim Fx \equiv \sim \exists x Fx$
$\sim \exists x \sim Fx \equiv \forall x Fx$	$\exists x \sim Fx \equiv \sim \forall x Fx$

II.) Özelleme kuralları:

a-) Tümel Özelleme Kuralı: Çözümleyici çizelgede işlem yapılırken  $\forall x Fx$  gibi bir tümel önermenin özellemesini yapmak için aynı yol üzerinde daha önce geçmiş bir ad sembolü (a, b, c gibi) varsa x bilinmeyenini yerine o ad sembolü yazılır. Eğer daha önce geçmiş bir ad sembolü yoksa, herhangi bir sembol kullanılır. Çözüm yapılan yol üzerinde birden fazla ad sembolü geçiyorsa, bu ad sembollerinin her biri ile tümel önermenin ayrı ayrı özellemesi yapılır. Tümel özelleme yapılırken tümel niceleyici ( $\forall$ ) kalkar, sadece yüklem sembolü kalır.

Örnek:

$\forall x Fx, Fb \therefore Gb$  çıkarımının geçerliliğini denetleyelim:

1.  $\forall x Fx$  (Önc.)  
 $Fb$  (Önc.)  
 $\sim Gb$  ( $\sim$  Snç.)  
 $Fb$  (1)

(Yol açık olduğundan çıkarım geçersizdir. )

b-) Tikel Özelleme Kuralı:

Çözümleyici çizelgede işlem yapılırken  $\exists x Fx$  gibi bir tikel önermenin özellemesini yapmak için aynı yol üzerinde daha önce geçmiş bir ad sembolü (a,b,c gibi) varsa x bilinmeyenini yerine o ad sembolünden farklı bir ad sembolü kullanılır. Eğer daha önce geçmiş bir ad sembolü yoksa, herhangi bir ad sembolü kullanılır. Tikel özelleme yapılırken tikel niceleyici ( $\exists$ ) kalkar. Sadece yüklem sembolü kalır.

Örnek:

$\exists x Fx, Gb \therefore Ga$  çıkarımının geçerliliğini denetleyelim:

1.  $\exists x Fx$  (Önc.)  
 $Gb$  (Önc.)  
 $\sim Ga$  ( $\sim$ Snç.)  
 $Fc$  (1) (Çıkarım geçersizdir.)

## IV. Ünite: SEMBOLİK MANTIK: C-Niceleme / Yüklemler Mantığı – “Özet”

*Mantık, hakikate sevk eden zihin işlemlerinin bilimi ...*

### DENETLEME ÖRNEKLERİ:

**Örnek 1)**  $\neg\forall x Fx$ ,  $\neg\exists x Fx$  önermelerinin bir arada tutarlı olup olmadığını denetleyelim:

1.  $\neg\forall x Fx$ , (Ö)
2.  $\neg\exists x Fx$  (Ö)
3.  $\exists x \neg Fx$  (1) (1. Adımda tümel niceleyici değilme kuralı uygulandı)
4.  $\forall x \neg Fx$  (2) (2. Adımda tikel niceleyici değilme kuralı uygulandı)

$\neg Fa$  (3) (3. adımda Tikel özelleme kuralı uygulandı)

$\neg Fa$  (4) (4. adımda Tümel özelleme kuralı uygulandı)  
(Önermeler tutarlıdır.)

### Örnek 2)

$\forall x Fx \Rightarrow \exists x Fx$  önermesinin geçerli olup olmadığını denetleyelim:

1.  $\neg(\forall x Fx \Rightarrow \exists x Fx)$  ( $\neg$ Ö)
3.  $\forall x Fx$  (1)
2.  $\neg\exists x Fx$  (1)
4.  $\forall x \neg Fx$  (2)
- $Fa$  (3)
- $\neg Fa$  (4)
- X (Önerme geçersizdir.)

### Örnek 3)

$(\exists x Fx \wedge \exists x Gx)$  önermesinin geçerliliğini denetleyelim:

1.  $\neg(\exists x Fx \wedge \exists x Gx)$  ( $\neg$ Ö)

