

## NİCELEME MANTIĞI / YÜKLEMLER MANTIĞI

Önermeler mantığının önermelerin içyapısını, niceliğini ifade etmedeki yetersizliğinden dolayı yeni bir mantık sistemine gerek duyulmuştur: Niceleme mantığı. Niceleme mantığında yalnızca bileşik önermelerin değil, basit önermelerin içyapısı ve niceliği de sembolleştirilmektedir. Böylece önerme ve çıkarımların daha kesin ve güvenli denetlenmesi imkânı sağlanmıştır. Basit önermeleri de konu/özne ve yüklemeleri bakımından sembolleştirmeyi esas aldığından yüklem mantığı diye de adlandırılan bu mantık sistemi, önermeler mantığından daha kapsamlı iki değerli mantık alanıdır.

Öncelikle Niceleme /Yüklem Mantığının temel kavramları ve sembolleştirilmesi ile ilgili bilgileri özetleyelim:

**DEĞİŞMEZ:** Kendi içinde daha küçük anlamlı birimlere ayrılamayan deyimlere/sözcüklere denir. Mantık değişmezleri ve özel değişmezler olmak üzere iki gruba ayrılırlar.

**a- Mantık değişmezleri:** eklemler, niceleyiciler; mantığın bütün konularında kullanılırlar: ( $\sim$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$ ,  $\forall$ ,  $\exists$ , (...), {...}, [...],  $\cdot$ )

**b- Özel değişmezler:** ad /terim/ konu/ özne ve yüklem değişmezleridir.

**Ad /konu değişmezleri** (a, b, c, d ...) gibi küçük harflerle sembolleştirilirler.

**Yüklem değişmezleri** (F, G, H, A, B, ...) gibi büyük harflerle sembolleştirilirler.

**Örnekler:**

1.) “Tebeşir beyazdır.” (Konu/terim/özne/ad: *tebeşir* (a) | Yüklem: “*beyazdır.*” “F” |  $a F \equiv F a$ ) Önermeler mantığında (p) biçiminde sembolleştirilen “Tebeşir beyazdır.” önermesi, yüklem mantığında (Fa) biçiminde sembolleştirilir.

2.) “1 tek sayı ise 2 çift sayıdır.” ( $F a \Rightarrow H b$ )

3.) “Platon ve Aristoteles filozofturlar.” ( $F a \wedge F b$ )

Not: Niceleme mantığında önermenin yüklemi; tek bir özneye/konuya ait ise 1’li yüklem, 2 özneye ait ise 2’li yüklem, 3 özneye ait ise 3’lü yüklem n sayıda özneye aitse n’li yüklem adını alır. Önermelerde birden fazla yüklem bulunabilir. Önermede geçen aynı ad ve yüklem aynı sembollerle gösterilir. Sembolleştirmede önce yüklem, sonra terim/ad/özne sembolü yazılmalıdır.

4.) “Dört üçten büyüktür.” ( $a B b \equiv B a b$ ) (2’li yüklemli)

5.) “Yalova, Karamürsel ile Orhangazi arasındadır.” ( $F a b c$ ) (3’lü yüklemli)

6.) “Hava güzel olursa Adalar’a gideceğim. Hava güzeldir. O halde Adalar’a gideceğim.” Çıkarımı şöyle sembolleştirilebilir: ( $G h \Rightarrow F a, G h \therefore F a$ )

**TEKİL ÖNERME:** İçinde herhangi bir niceleyici bulunmayan, nicelik bildiren bir ifade geçmeyen önermedir. Yukarıda geçen örneklerdeki önermeler tekil önermelerdir. Basit veya bileşik olabilirler. ( $F a, F a \Rightarrow H b$  gibi.)

**NİCELEYİCİ:** Önermelerin niceliğini belirten “her, bütün, bazı, kimi, hiçbir ” gibi terimlere niceleyici denir. Niceleyiciler bir açık önermeyi gerçekleyen nesnelere / adların sayısı hakkında bilgi veren değişken bağlacıdır.

**TÜMEL NİCELEYİCİ:** “Her, bütün, tüm, hepsi, hiçbir” anlamına gelen ( $\forall$ ) sembolüyle gösterilen niceleyicidir. Birli açık önermenin özellemelerinin tümü doğru olduğunda ancak doğru bir önermeyi oluşturan niceleyicidir. Ana eklemi tümel niceleyici olan önermeye *tümel niceleme önermesi* denir.

“Bütün x 'ler için x ağırdır.” gibi bir önerme, *tümel niceleme önermesidir*. ( $\forall x F x$ ) biçiminde sembolleştirilir.

**TİKEL NİCELEYİCİ:** “Bazı, bir kısım, kimi, en az bir” anlamına gelen ( $\exists$ ) sembolüyle gösterilen niceleyicidir. Birli açık önermenin özellemelerinden en az biri doğru olduğunda ancak doğru bir önermeyi oluşturan niceleyicidir. Ana eklemi tikel niceleyici olan önermeye *tikel niceleme önermesi* denir. “Bazı x’ler için x katıdır.” önermesi, **tikel niceleme önermesidir.** ( $\exists xFx$ ) biçiminde sembolleştirilir.

**GENEL ÖNERME:** İçinde niceleyici geçen önermeye genel önerme denir. Genel önermeler de basit veya bileşik olabilir.

Örnek: “Bütün insanlar solunum yapar.”  $\forall x Sx$  *tümel niceleme önermesi* daha ayrıntılı olarak “ $\forall x (Ix \Rightarrow Sx)$ ” biçiminde sembolleştirilir.

“Bazı çiçekler güzel kokar.”  $\exists x Gx$  *tikel niceleme önermesinin* ayrıntılı sembolleştirilmesi: “ $\exists x (\text{Çx} \wedge Gx)$ ”

Niceleme Mantığında önerme türleri aşağıdaki tabloda özetlenmiştir:

NİCELEME MANTIĞINDA ÖNERMELER			
TEKİL ÖNERMELER (İçinde niceleyici geçmeyen)		GENEL ÖNERMELER (İçinde niceleyici geçen)	
BASİT	BİLEŞİK	BASİT (Tek niceleyici geçen)	BİLEŞİK (En az bir niceleyici ve ana eklem geçen)
Fa Gb	Fa $\wedge$ Fb ~ Fa	TÜMEL $\forall xFx$	TİKEL $\exists xFx$
			$\forall xFx \Rightarrow \exists xFx$ $\sim \forall xFx$

Tablo: Niceleme Mantığında Önerme Türleri

**AÇIK ÖNERME:** İçinde en az bir değişken geçen önermedir. Bu değişkenler yerine bir ad/konu/özne konulduğunda doğru ya da yanlış değerler alabilen önermeler açık önermedir. Bir önerme *belirsiz* bir *nesne* veya *kişiyi* özne/konu olarak alabilir. Bu tür önermelerde belirsiz olan özneyi/konuyu göstermek için **x, y, z** gibi değişken sembolleri kullanılır.

**Fx :** “x çiçektir.” x yerine, “menekşe (m)” terimini, yani ad değişmezini/bireysel değişmezini yerleştirdiğimizde, Fx açık önermesi artık doğruluk değerini alan kapalı bir önerme olur: (F m: Menekşe çiçektir.)

Bir açık önermeyi, doğruluk değeri alacak bir önerme haline getirmek için kullandığımız tüm değerler kümesine **evren** denir. **E: {...}** biçiminde gösterilir. **E: {papatya, gül, menekşe, şebboy, yonca, ağaç }** gibi.

Verilen evrende bulunan değerlerin (terimlerin) değişkenin yerine konulmasına **özelleme**; böyle elde edilen önermeye de **özelleme önermesi** adı verilir.

Bir açık önermede verilen evrendeki her değer için yapılan özellemelerin toplamına **açılım** denir. Açılımda yer alan önermeler açık önermeyi doğru kılabilceği gibi yanlışlayabilir. E evrenine ait değerlerden en az birinin özellenen önermeyi doğrulamasına **gerçekleme** denir.

**Örnekler:**

E: {1,2,3,4,5,6,7,8,9}

Px: “x tek sayıdır.”  $X_1 : 1$  “1 tek sayıdır.” (Gerçekliyor.)  $x_2 : 2$  “2 tek sayıdır.” (Gerçeklemiyor.)

E: {papatya, gül, menekşe, şebboy, yonca, ağaç, taş }

Çz: “z çiçektir.”  $z_1$ : papatya “Papatya çiçektir.”  $z_2$ : ağaç “Ağaç çiçektir.”

➤ Genel Önermelerin /İçinde niceleyici geçen önermelerin açılımı yapılırken;

Tümel Nicelemede ( $\forall$ ), özelleme önermeleri tümel evetleme ( $\wedge$ ) eklemiyle birbirine bağlanır.

Tikel Nicelemede ( $\exists$ ) ise, özelleme önermeleri tikel evetleme ( $\vee$ ) eklemiyle birbirine bağlanır.

- $\forall x Px$  *tümel önermesinde* (Px) ,  $\forall x$  niceleyicisinin etki alanıdır.  $\exists x Gx$  *tikel niceleme önermesinde* ise,  $\exists x$  niceleyicisinin etki alanı (Gx) tir.
- Genel önermelerin doğruluk değeri verilen evrene bağlıdır:
  - ◆ Tümel Niceleme Önermesi, verilen E'deki elemanların tüm özellemelerinde gerçekleşiyorsa (D) , en az biri tarafından yanlışlanıyorsa (Y) değerini alır. (Tümel evetlemenin doğruluk ilkesinde olduğu gibi)
  - ◆ Tikel Niceleme Önermesi, verilen E'deki elemanların en az bir özellemesinde gerçekleşiyorsa (D), hiçbir özellemesinde gerçekleşmiyorsa, yani özellemelerinin tümünün yanlış olması halinde (Y) değerini alır. (Tikel evetlemenin doğruluk ilkesinde olduğu gibi)

### Örnekler:

- $\forall x(Fx \Rightarrow Gx)$  önermesinin "E : {a, b}" evrenindeki açılımı aşağıdakilerden hangisidir?

- A)  $(Fa \Rightarrow Ga) \vee (Fb \Rightarrow Gb)$
- B)  $(Fa \Rightarrow Gb) \wedge (Fb \Rightarrow Ga)$
- C)  $(Fa \wedge Ga) \Rightarrow (Fb \wedge Gb)$
- D)  $(Fa \Rightarrow Ga) \wedge (Fb \Rightarrow Gb)$
- E)  $(Fb \wedge Ga) \Rightarrow (Fa \wedge Gb)$  ( Cevap: D / 2008 - ÖSS)

- " $\forall x$  (x metaldir)" önermesi aşağıdakilerin hangisinde verilen evrende doğrudur?

- A) {Altın, Demir, Bakır}
- B) {Kurşun, Cıva, Plastik}
- C) {Kalay, Kum, Çimento}
- D) {Nikel, Cam, Naylon}
- E) {Kağıt, Krom, Kauçuk} ( Cevap: A / 1998 - ÖYS)

- "Her x için x sıfırdan büyüktür." [ $\forall x (x > 0)$ ] açık önermesi tam sayıları evreninde yanlış; doğal sayılar evreninde doğru değerini alır.

### Buna göre, bir tümel önermenin, verilen bir evrende doğru değerini alması için aşağıdakilerden hangisi gereklidir?

- A) Evrene ait tüm nesnelere gerçekleşmesi
- B) Evrenin alt kümelerinde yanlış olması
- C) Evrenin kapsamının dar olması
- D) Evrenin sonsuz sayıda nesnelere oluşması
- E) Evrende en az bir özellemesinin doğru olması ( Cevap: A / 1986-ÖYS)

- ❖ "Bütün insanlar akıllıdır." tümel önermesi (  $\forall x Fx$  ) biçiminde sembolleştirilir ve "bütün x'ler için x akıllıdır." anlamına gelir. Aynı tümel niceleme önermesi daha ayrıntılı olarak şöyle de sembolleştirilebilir:  $\forall x (Ix \Rightarrow Fx)$  "Bütün x'ler için, x insan ise akıllıdır." anlamına gelir.
- ❖ "Bazı öğrenciler gözlüklüdür." (  $\exists x Fx$  ) tikel niceleme önermesi de ayrıntılı olarak şöyle sembolleştirilebilir:  $\exists x (Fx \wedge Gx)$  "Bazı x'ler için x hem öğrenci, hem de gözlüklüdür." diye okunur. Tümel niceleme önermesinde ( $\Rightarrow$ ), tikel nicelemede ise ( $\wedge$ ) eklemine dikkat ediniz.
- ❖ "Hiçbir öğrenci tembel değildir."  $\equiv \forall x \sim Tx \equiv \forall x \sim (Öx \Rightarrow \sim Tx)$
- ❖ "Bütün öğrencilerin tembel olduğu doğru değildir."  $\equiv \sim \forall x Tx \equiv \sim \forall x (Öx \Rightarrow Tx)$
- ❖ "Bazı çiçekler güzel kokar."  $\equiv \exists x Gx \equiv \exists x (Çx \wedge Gx)$
- ❖ "Bazı çiçekler güzel kokmaz."  $\equiv \exists x \sim Gx \equiv \exists x (Çx \wedge \sim Gx)$
- ❖ "Bazı çiçeklerin güzel koktuğu doğru değildir."  $\equiv \sim \exists x Gx \equiv \sim \exists x (Çx \wedge Gx)$
- ❖ "Her sayının sonlu olduğu doğru değildir."  $\equiv \sim \forall x Sx \equiv \exists x \sim Sx \equiv$  "Bazı sayılar sonsuzdur."
- ❖ "Bazı hastalıklar bulaşıcıdır."  $\equiv \exists x Bx$
- ❖ "Bazı hastalıkların bulaşıcı olduğu doğru değildir."  $\equiv \sim \exists x Bx$

## NİCELEME / YÜKLEMLER MANTIĞINDA DENETLEME

Niceleme Mantığında önermelerin tutarlılık, geçerlilik, eşdeğerlik, çıkarımların geçerlilik denetlemesi yalnızca çözümleyici çizelgeyle yapılabilir. Önermeler / Eklemler mantığında geçerli olan kurallar niceleme mantığında da aynen geçerlidir. Tekil önermelerin çözümlenip denetlenmesinde önermeler mantığının çözümlenme kuralları yeterlidir.

Ancak, genel önermelerin çözümlenip denetlenmesinde önermeler mantığının çözümlenme kuralları yanında niceleme mantığına özgü kurallar da uygulanır: a.) Niceleyici değilleme kuralları ve b.) Özelleme kuralları. Ayrıca niceleme/yüklemler mantığında çözümlenmede işlem akışının kendine özgü sırası vardır. Bu işlem akışı şu sıradadır:

1. Tümel niceleyici değilleme kuralı
2. Tikel niceleyici değilleme kuralı
3. Alt alta yazma kuralları
4. Tikel özelleme kuralı
5. Çatal açma kuralları
6. Tümel özelleme kuralı

**I.) Niceleyici değilleme kuralları:** Bu kurallar tümel ve tikel önermelerin birbirine dönüştürülmesini sağlar. Niceleyicilerin önündeki değillmelerin kaldırılması ve böylelikle eşdeğeri olan önermenin elde edilmesi imkânını hazırlar.

a-) Tümel niceleyici değilleme kuralı:  $\sim \forall x Fx \equiv \exists x \sim Fx$

b-) Tikel niceleyici değilleme kuralı:  $\sim \exists x Fx \equiv \forall x \sim Fx$

Bu kurallardan şu eşdeğerlikler elde edilir:

$\sim \forall x \sim Fx \equiv \exists x Fx$	$\forall x \sim Fx \equiv \sim \exists x Fx$
$\sim \exists x \sim Fx \equiv \forall x Fx$	$\exists x \sim Fx \equiv \sim \forall x Fx$

**II.) Özelleme kuralları:**

a-) Tümel Özelleme Kuralı

Çözümleyici çizelgede işlem yapılırken  $\forall xFx$  gibi bir tümel önermenin özellemesini yapmak için aynı yol üzerinde daha önce geçmiş bir ad sembolü (a, b, c gibi) varsa x bilinmeyen yerine o ad sembolü yazılır. Eğer daha önce geçmiş bir ad sembolü yoksa, herhangi bir sembol kullanılır. Çözüm yapılan yol üzerinde birden fazla ad sembolü geçiyorsa, bu ad sembollerinin her biri ile tümel önermenin ayrı ayrı özellemesi yapılır. Tümel özelleme yapılırken tümel niceleyici ( $\forall$ ) kalkar, sadece yüklem sembolü kalır.

Örnek:  $\forall xFx, Fb \therefore Gb$  çıkarımının geçerliliğini denetleyelim:

1.  $\forall xFx$  (Önc.)

$Fb$  (Önc.)

$\sim Gb$  ( $\sim$  Snç.)

$Fb$  (1) Yol açık olduğundan çıkarım geçersizdir.

### b-) Tikel Özelleme Kuralı:

Çözümleyici çizelgede işlem yapılırken  $\exists x Fx$  gibi bir tikel önermenin özellemesini yapmak için aynı yol üzerinde **daha önce geçmiş bir ad sembolü** (a,b,c gibi) *varsa* x bilinmeyeni yerine *o ad sembolünden farklı bir ad sembolü kullanılır*. Eğer daha önce geçmiş bir ad sembolü yoksa, herhangi bir ad sembolü kullanılır. Tikel özelleme yapılırken tikel niceleyici ( $\exists$ ) kalkar. Sadece yüklem sembolü kalır.

Örnk:  $\exists x Fx, Gb \therefore Ga$  çıkarımının geçerliliğini denetleyelim:

1.  $\exists x Fx$  (Önc.)
- $Gb$  (Önc.)
- $\sim Ga$  ( $\sim$ Snc)
- $Fc$  (1) (Çıkarım geçersizdir.)

### DENETLEME ÖRNEKLERİ:

**Örnek 1)**  $\sim \forall x Fx, \sim \exists x Fx$  önermelerinin bir arada tutarlı olup olmadığını denetleyelim:

1.  $\sim \forall x Fx$ , (Ö)
2.  $\sim \exists x Fx$  (Ö)
3.  $\exists x \sim Fx$  (1) (1. Adımda tümel niceleyici değilleme kuralı uygulandı)
4.  $\forall x \sim Fx$  (2) (2. Adımda tikel niceleyici değilleme kuralı uygulandı)

$\sim Fa$  (3) (3. adımda Tikel özelleme kuralı uygulandı)

$\sim Fa$  (4) (4. adımda Tümel özelleme kuralı uygulandı) (Önermeler tutarlıdır.)

### Örnek 2)

$\forall x Fx \Rightarrow \exists x Fx$  önermesinin geçerli olup olmadığını denetleyelim:

1.  $\sim (\forall x Fx \Rightarrow \exists x Fx)$  ( $\sim$ Ö)
3.  $\forall x Fx$  } (1)
2.  $\sim \exists x Fx$  }
4.  $\forall x \sim Fx$  (2)
- $Fa$  (3)
- $\sim Fa$  (4)
- X (Önerme geçerlidir.)

### Örnek 3)

$\exists x Fx \wedge \exists x Gx$  önermesinin geçerliliğini denetleyelim:

1.  $\sim (\exists x Fx \wedge \exists x Gx)$  ( $\sim$ Ö)
- (1)
2.  $\sim \exists x Fx$       4.  $\sim \exists x Gx$
3.  $\forall x \sim Fx$  (2)    5.  $\forall x \sim Gx$  (4)
- $\sim Fa$  (3)       $\sim Ga$  (5) (Önerme geçersizdir.)