III.Ünite:(Modern) Sembolik Mantık

Önerme Çeşitleri | Ana Eklem Ana Bileşen | Temel Doğruluk Değerleri | Tutatlılık-Geçerlilik-Eşdeğerlik | Çözümleyici Çizelge | Çözümleyici Çizelge İle Denetleme | Yüklemler -Niceleme Mantığı | Niceleyici Değilleme Kuralları |

MODERN (SEMBOLİK) MANTIK

A. ÖNERMELER MANTIĞI

1. Önermelerin Sembolleştirilmesi

Önermeler mantığında her bir yargı p, q, r... gibi sembollerle ifade edilir.

Örnek:

Dünya gezegendir. Dünya'nın şekli elipstir.

p q

Güneş yakıcıdır.

r

2. Önerme Eklemleri : ~, ^, v , ⇒ , ⇔

Dünya gezegen ise güneş yakıcıdır. (p ⇒ r)

p ⇒ r

Dünya gezegendir ve şekli elipstir. (p ^ q)

p ^ q

Ay, ışık kaynağı değildir. (~p)

p ~

Bitkiler köklüdür. (p)

Dünya gezegendir veya güneş yakıcıdır. (p v r)

p v r

Güneş doğduğunda ancak gündüz olur. (p ⇔ r)

p ⇔ r

3. Önerme Çeşitleri

a. Basit önerme

Bir tek yargısı olan önermeler basittir.

Aristotales filozoftur.

p

Bazı çiçekler kokuludur.

q

b. Bileşik önerme

Birden fazla yargısı olan önermeler bileşiktir.

Aristotales filozoftur veya bilim adamıdır. ($p \vee q$)

p q

Yağmur yağıyor ise hava bulutludur. ($r \Rightarrow s$)

r s

Not: İçinde önerme eklemi taşıyan önermeler de birden fazla yargı taşıdıklarından bileşiktirler.

İstanbul başkent değildir (~ p)

p (bileşen) ~

Kuşlar kanatlıdır ve iki ayaklıdır. (q ^ r)

q (bileşen) r (bileşen)

Bileşik önermeyi meydana getiren önermelerin her birine bileşen denir. Hiçbir bileşeni olmayan önermeler basittir. Sadece değilleme (~) ekleminin tek bileşeni vardır. Kuşlar ötücüdür. (p) önermesi basittir.

Kuşlar ötücü değildir. (~p) önermesi bileşiktir.

4. Ana Eklem - Ana Bileşen

Birden fazla bileşik önermeden oluşan önermelerde en son işleme katılan eklem, ana eklemdir.

Ana eklemin karşıladığı önermeler de ana bileşendir.

$\underline{\sim [\sim (p \vee q)]} \Leftrightarrow \underline{(\sim p \vee q)}$

Ana bileşen ↓ ana bileşen

Ana eklem

$\sim \underline{[\sim (p \Rightarrow \sim q)]}$

↓ Ana bileşen

Ana eklem

$\sim \underline{(p \Rightarrow \sim q)}$

↓ Ana bileşen

Ana eklem

$\underline{p} \Rightarrow \underline{\sim q}$

Ana bileşen ↓ Ana bileşen

Ana eklem

5. Temel Doğruluk Çizelgeleri

a. Değilleme eklemi (~)

<table>
<tr>
<td>
<u>Bilim faydalıdır</u>. (p)

<u>Bilim faydalı</u> <u>değildir</u>. (~ p)

p ~

<u>Bilimin faydalı olmadığı doğru</u> <u>değildir</u>. (~~p)

~P ~
</td>
<td>

p	~p	~~p
D	Y	D
Y	D	Y

</td>
</tr>
</table>

b. Tikel evetleme eklemi (v)

Bileşenlerden en az birinin doğru olduğunu kabul eden önerme eklemidir.

<u>Hava bulutludur</u> veya <u>hava yağmurludur</u>. (p v q)

p q

p	q	$p \vee q$
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

c. Tümel evetleme eklemi (^)

Bileşenlerinin tümünün doğru olduğunu kabul eden önerme eklemidir. Bileşenlerin birlikteliğini ifade eden ile, kadar, hem-hem, da-da tümel evetleme eklemiyle belirtilir.

Mevsim yazdır ve güneş yakıcıdır. (p ^ q)

p q

p	q	$p \wedge q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

d. Koşul eklemi (⇒)

Yargının bir koşula bağlı olduğu önerme eklemidir. Ön bileşenin (D), art bileşenin (Y) olması durumunda (Y), diğer durumlarda ise (D) değerini alır.

Yağmur yağıyor ise hava bulutludur. (p ⇒ q)

p (ön bileşen) q (ard bileşen)

p	q	$p \Rightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

Hava bulutlu değilSE yağmur yağmaz. (~q ⇒ ~p)

~q ~p

önermesi, p ⇒ q önermesinin mantıksal sonucudur. Dolayısıyla aynı doğruluk değerlerine sahiptirler.

Yağmur yağmıyor veya hava bulutludur. (~ p v q)

~ p q

önermesi de, p ⇒ q önermesinin mantıksal sonucudur. Dolayısıyla doğruluk değerleri aynıdır.

p	~ ~ p;	P ⇒ q	~ q ⇒ ~ p,	p v ~ p,	q v ~ q
D	D	D	D	D	D
Y	Y	Y	Y	D	D
		D	D		
		D	D		

≡ ≡ ≡

e. Karşılıklı koşul eklemi (⇔)

Yargının sadece **tek bir koşula** bağlı olduğu önerme eklemidir. Buna göre ön ve art bileşen aynı anda aynı doğruluk değerlerine sahip olduklarında (D); farklı değerlere sahip olduklarında ise (Y) değerini alır.

<u>Güneş doğduğunda</u> ancak ve ancak <u>gündüz olur</u>. (p ⇔ q)

p	**q**	**p⇔q**
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

6. Denetlemeler

a. Tutarlılık

- **Bir önermenin tutarlılığı :** Yorumlama tablosunda doğrulardan oluşan **en az** bir satırı bulunan önermeler tutarlıdır.

Mevsim kıştır. p	p D Tutarlı Y Geçersiz

Not 1:

1. Tutarlı önermeler geçersiz olabilir.

2. Geçersiz önermeler tutarlı olabilir.

<u>Mevsim kıştır</u> veya <u>mevsim kış değildir</u>. (p v ~ p)

p ~ p

p	~p	p ∨ ~ p
D	Y	D
Y	D	D

Tutarlı

Geçerli

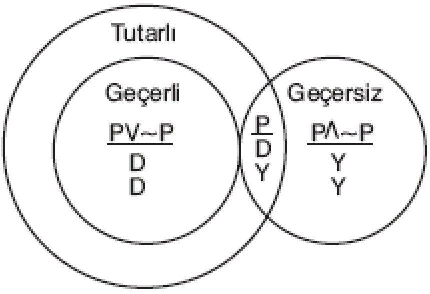
Not : 2 Geçerli her önerme tutarlıdır.

<u>Mevsim kıştır</u> ve <u>mevsim kış değildir</u>. (p ^ ~ p)

p	~p	p ∧ ~ p
D	Y	Y
Y	D	Y

Tutarsız

Geçersiz



Not 3:

- Tutarsız her önerme geçersizdir.
- Geçersiz bir önerme tutarsız olabilir.
- **Birden fazla önermenin birlikte tutarlılığı:** Yorumlama tablosunda doğrulardan oluşan ortak bir yorumu bulunan önermeler birlikte tutarlıdır.

p	q	~ p ∨ q	~ p ⇒ q
D	D	D	D
D	Y	Y	D
Y	D	D	D
Y	Y	D	Y

~ p v q , ~ p ⇒ q

önermeleri birlikte

tutarlıdır.

b. Geçerlilik:

Yorumlama tablosunda yanlışlardan oluşan hiçbir satırı bulunmayan önermeler geçerlidir. Yukarıda geçen önermelerin geçerliliğini inceleyelim,

- **Çıkarımların Geçerliliği:** Bir çıkarımın geçerli olması, öncülleri doğruyken sonucun yanlış olmamasına bağlıdır. Buna göre öncülleri doğru iken sonucu yanlış olan çıkarım geçersiz, diğer hallerde geçerlidir.Örnek:

Güneş doğmuştur. (p) öncül

O halde gündüz olmuştur (q) sonuç

p ⇒q olarak sembolleştirilebilen bu çıkarımın geçerliliğini inceleyelim.

I. Durum	II. Durum	III. Durum	IV. Durum
D	D	Y	Y
D	Y	D	Y
Geçerli	Geçersiz	Geçerli	Geçerli
$D \Rightarrow D \equiv \boxed{D}$	$D \Rightarrow Y \equiv \boxed{Y}$	$Y \Rightarrow D \equiv \boxed{D}$	$Y \Rightarrow Y \equiv \boxed{D}$

c. Eşdeğerlilik:

Aynı doğruluk değerine sahip önermeler eşdeğerdir.

p	$\sim\sim p$;
D	D
Y	Y

$\equiv$

$P \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$,
D	D
Y	Y
D	D
D	D

$\equiv$

$p \vee \sim p$,	$q \vee \sim q$
D	D
D	D

$\equiv$

Not: Bütün geçerli önermeler eşdeğerdir.

$p \wedge \sim p$	$q \wedge -q$
Y	Y
Y	Y

$\equiv$

Not: Bütün tutarsız önermeler eşdeğerdir.

A, B gibi iki ayrı önermenin eşdeğer olması (aynı doğruluk değerinde olması) A ⇔ B önermesinin geçerli olmasına veya ~ (A ⇔ B) önermesinin tutarsız olmasına bağlıdır.

Buna göre ~ (A ⇔ B) tutarsız ise, (A ⇔ B) geçerlidir. Dolayısıyla A ile B eşdeğerir.

B. ÇÖZÜMLEYİCİ ÇİZELGE

(*Hazırlandığında yüklenecek*)

C. YÜKLEMLER MANTIĞI

İçinde ∀ **(her),** ∃ **(bazı)** gibi niceleyici geçen önermeler yüklemler mantığının konusunu oluşturur. Bu önermelere **genel önerme** denir. İçine niceleyici geçmeyen önermelere de **tekil önerme** denir.

Yüklemler mantığında önermeler mantığından farklı olarak basit önermelerin **iç yapıları** da sembolleştirilebilmektedir. Örnek olarak:

"Bütün kuşlar kanatlıdır" önermesi önermeler mantığında **p** olarak sembolleştirilirken, yüklemler mantığında **(∀ xFx)** şeklinde sembolleştirilir. Bu ayrıntılı sembolleştirilmeden dolayı önermeler mantığında tutarlı olan bir önerme yüklemler mantığında tutarsız olabilmektedir.

1. Tanımlamalar

a. Değişmezler ve sembolleştirilmesi:

- Mantık değişmezleri:

~, ^, v , ⇒ , ⇔ (önerme eklemleri)

∀, ∃ (niceleyiciler)

- Özel değişmezler:

a, b, c...(ad değişmezleri)

F, G, H ...(yüklem değişmezleri)

<u>Aristo</u> <u>filozoftur</u> (Fa)

a F

<u>Aristo</u> <u>insandır</u>. (Ga)

a G

<u>Sokrates</u> <u>insandır</u>. (Gb)

b G

<u>Aristo filozof</u> ise <u>Aristo insandır</u>. (Fa ⇒ Ga)

Fa ⇒ Ga

b. Değişkenler: Belli bir değeri olmayan ve farklı değerler alabilen x, y, z... gibi sembollere **değişken** denir. içine x, y, z gibi değişken geçen önermelere de **açık önerme** denir. Örneğin;

“x < z”

“x + y = 4"

“z başkenttir.” birer açık önermedir.

Açık önermelerin doğruluk değeri yoktur.

c. Tümel Niceleme: “x katıdır” (Kx) açık önermesi E= {demir, cam} evreninde

“Demir katıdır.”

“Cam katıdır.” özellemeleri yapıldığında, evrendeki **tüm elemanlar** (Tümel niceleme gereği evrendekilerin hepsi) açık önermedeki x’i karşılarsa, Kx açık önermesi verilen evren için
"**x K x** olarak gösterilir.

“ ∀ x (x başkenttir)" önermesinin E = {Ankara, İstanbul} evreninde;

“Ankara başkenttir.” D

“İstanbul başkenttir.” Y

özellemeleri yapıldığında, D ^ Y ≡ Y sonucuna ulaşılır. Buna göre tümel niceleyici ile yapılan önerme verilen evrende gerçeklenmemiştir.

d. Tikel niceleme: “x sıvıdır.” (Sx) açık önermesi E= {su, taş} evreninde, “Su sıvıdır.”

“Taş sıvıdır.” özellemeleri yapıldığında; evrendeki **bazı elemanlar** (Tikel niceleme gereği evrendekilerden en az biri) açık önermedeki x’i karşılarsa, Sx açık önermesi verilen evren için ($\exists x\ S\ x$) olarak gösterilir.

“$\exists$ x (tek sayıdır.)" önermesinin E = {0, 1, 2} evreninde

“0 tek sayıdır.” Y

“1 tek sayıdır.” D

“2 tek sayıdır.” Y özellemeleri yapıldığında,

Y v D v Y ≡ D sonucuna ulaşılır. Buna göre tikel niceleyici ile yapılan önerme verilen evrende gerçeklenmiştir.

Tümel niceleyici ile yapılan önermelerde, özellemelerin arasında tümel evetleme eklemi (^) kullanılır. Tikel niceleyici ile yapılan önermelerde, önermeler arasında tikel evetleme eklemi (v) kullanılır.

e. Niceleyici Değilleme Kuralları (Eşdeğerlilik)

$\sim \forall x\ F\ x \equiv \exists\ x \sim Fx$

$\sim \exists x\ F\ x \equiv \forall x \sim Fx$

$\sim \forall x \sim F\ x \equiv \exists x\ Fx$

$\sim \exists x \sim F\ x \equiv \forall x\ Fx$

Eşdeğerlilik Örnekleri:

Her insanın fakir olduğu doğru değildir. Bazı insanlar fakir değildir.	$\left.\begin{matrix}(\sim \forall x\, F\, x) \\ (\exists x \sim F\, x)\end{matrix}\right] \equiv$

Bazı insanların fakir olduğu doğru değildir. Hiçbir insan fakir değildir.	$\left.\begin{matrix}(\sim \exists x\, F\, x) \\ (\forall x \sim F\, x)\end{matrix}\right] \equiv$

Hiçbir insanın fakir olmadığı doğru değildir. Bazı insanlar fakirdir.	$\left.\begin{array}{l}(\sim \forall x \sim F x) \\ (\exists x \; F x)\end{array}\right] \equiv$

Bazı insanların fakir olmadığı doğru değildir. Her insan fakirdir.	$\left.\begin{array}{l}(\sim \exists x \sim F x) \\ (\forall x \; F x)\end{array}\right] \equiv$

AÖL - Mantık Notları:3.Ünite >>